ERWEITERUNGEN DES WAGNER-WHITIN ANSATZES

Inaugural - Dissertation
Zur Erlangung der Würde eines Doctor rerum politicarum
an der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität Bern

vorgelegt von
Tran-Ngoc-An
von
Saigon

Clausthal-Zellerfeld
Bönecke-Druck
1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548108_0032

ERWEITERUNGEN DES WAGNER-WHITIN ANSATZES

Inaugural - Dissertation
Zur Erlangung der Würde eines Doctor rerum politicarum
an der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität Bern

vorgelegt von
Tran-Ngoc-An
von
Saigon

Clausthal-Zellerfeld
Bönecke-Druck
1977

Die Fakultät hat diese Arbeit am 25. November 1976 auf Antrag von Prof. Dr. WERNER POPP als Dissertation angenommen, ohne damit zu den darin ausgesprochenen Auffassungen Stellung nehmen zu wollen.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

À ma vénérable mère CỬA
et à ma bien aimée femme CHRISTA

VORWORT

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Modellvarianten von dem WAGNER-WHITIN-Typ behandelt. Bei den verbalen Formulierungen habe ich mich bemüht, die deutsche Sprache so gut wie möglich zu gebrauchen. Für trotzdem verbliebene Unebenheiten bitte ich die Leser um Verständnis.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. WERNER POPP, möchte ich für seine wertvollen theoretischen und praktischen Hinweise und sein grosses Interesse an dieser Arbeit ganz besonders danken.

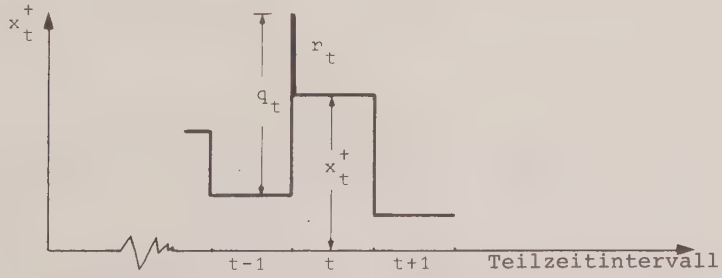
GLIEDERUNG

	Seite
1. Einleitung	1
2. Modellelemente	5
3. Grundmodell	11
4. Erweiterung auf Verzug	35
5. Erweiterung auf Kapazitätsbeschränkungen	53
6. Erweiterung auf mehrere Produkte	70
7. Schlussbemerkungen	76
ANHANG	78
LITERATURVERZEICHNIS	79

1. Einleitung

Das WAGNER-WHITIN Modell ist ein einstufiges Einproduktmodell mit einem endlichen diskreten Planungszeitraum[1]. Zu Beginn jedes Teilzeitintervalles erfolgt Erneuerung mit unendlicher Erneuerungsrate und Erneuerungsfrist von Null. Deterministischer Bedarf wird nach Erneuerung sofort wirksam mit unendlicher Bedarfsrate. Sowohl Erfüllungsverzug als auch Bedarfsverlust sind nicht zugelassen. Es bestehen keine Restriktionen in bezug auf Lager- und Erneuerungskapazität. Als Kostenarten werden fixe und proportionale Erneuerungskosten sowie Lagerkosten berücksichtigt. Die erneuerungsfixen Kosten und die Lagerkosten - im Gegensatz zu den erneuerungsproportionalen Kosten - können mit der Zeit variieren. Zielsetzung dieses Modelles ist es, ein kostenminimales Erneuerungsprogramm zu finden.

Als graphische Darstellung ergibt sich für einen Modellablauf folgendes Bild, wobei Erneuerungsmenge, Bedarfsmenge und nichtnegative Lagergrösse vor Erneuerung im Teilzeitintervall t mit q_t, r_t und x_t^+ bezeichnet werden.



[1]Vgl. Begriffe W. POPP [15], S. 2-19.

Zur Lösung des beschriebenen Modelles und deren Verallgemeinerungen wurden verschiedene Verfahren in der Literatur[1] vorgeschlagen. Hierbei sind die Ansätze von WAGNER und WHITIN, EPPEN, GOULD und PASHIGIAN, ZANGWILL, VEINOTT und von RIEPL hervorzuheben[2].

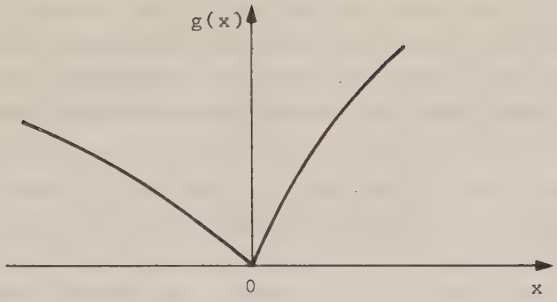
Es handelt sich bei diesen Ansätzen mit Ausnahme der Arbeiten von ZANGWILL und RIEPL um Einproduktmodelle. Während ZANGWILL den Mehrproduktfall ohne Schranken bezüglich Erneuerungsmengen und Lagergrössen betrachtete, führte RIEPL im Zeitverlauf konstante Erneuerungsschranken für jedes Produkt und eine gemeinsame Lagerkapazität für alle Produkte ein.

Bei allen Ansätzen - ausgenommen die von WAGNER und WHITIN und von EPPEN, GOULD und PASHIGIAN - treten stückweise konkave Funktionen $g(x)$ als Zielfunktionen auf. Eine graphische Darstellung einer solchen Funktion ist in der folgenden Abbildung gegeben.

---

[1] Vgl. B.P. DZIELINSKI, R.E. GOMORY [5] , G. EPPEN, F.J. GOULD, P. PASHIGIAN [6] , M. FLORIAN, M. KLEIN [7] , S.F. LOVE [11], M.R. RAO, R. JAGANNATHAN [16], R.J. RIEPL [17], A.F. Jr. VEINOTT ([20], [21]), W.I. ZANGWILL [27].

[2] Vgl. H.M. WAGNER, T.M. WHITIN [23], W.I. ZANGWILL ([24], [25], [26]), A.F. Jr. VEINOTT, A.S. MANNE [21].



Die Betrachtung stückweise konkaver Funktionen erschwert die Ableitung optimaler Entscheidungsregeln.

Wie an späterer Stelle zu ersehen ist, kann die stückweise konkave Funktion in eine konkave Funktion transformiert werden, so dass diese optimalen Entscheidungsregeln auf einfache Weise abgeleitet werden können.

Bei der vorliegenden Arbeit werden folgende Betrachtungen angestellt:

1. Erneuerungsproportionale Kosten können im Zeitverlauf beliebig, d.h. zum Beispiel konstant, oder monoton zunehmend oder monoton abnehmend sein.
2. Erfüllungsverzug kann auftreten.
3. Erneuerungs- und Lagerschranken können auftreten und im Zeitverlauf beliebig variieren.
4. Verschiedene Produkte sind durch eine gemeinsame Lagerkapazität verbunden.

Für alle zu behandelnden Modellvarianten erweisen sich die dynamische Programmierung[1] und die lineare Programmierung[2] als mögliche Lösungsverfahren.

---

[1] Vgl. R. BELLMAN [1].

[2] Vgl. G. HADLEY [8].

Sowohl im Ein- als auch im Mehrproduktfall können die Berechnungen mit Hilfe der vorwärtsdynamischen Programmierung bzw. der linearen Programmierung unter Berücksichtigung des linearen Dekompositionsprinzipes[1] durchgeführt werden.

Im folgenden beschäftigt sich der Abschnitt 2. mit den Modellelementen des WAGNER-WHITIN Typs.

Im Abschnitt 3. wird das Grundmodell betrachtet. Während im Abschnitt 3.1 eine Formulierung des Modelles mit der linearen gemischt-ganzzahligen Programmierung angegeben ist, werden wir im Abschnitt 3.2 die dynamische Programmierung verwenden. Anschliessend werden wir die Fälle mit im Zeitverlauf konstanten, monoton zunehmenden und monoton abnehmenden erneuerungsproportionalen Kosten betrachten.

Im Abschnitt 4. werden wir das Grundmodell auf Verzug erweitern. Dabei werden wir ganz analog zu Abschnitt 3. verfahren.

Dies gilt auch für den Abschnitt 5., wobei das Grundmodell mit Verzug auf Kapazitätsbeschränkungen bezüglich Erneuerungsmengen und Lagergrössen erweitert wird. Anschliessend werden die Fälle mit Lager- bzw. Erneuerungsschranke betrachtet.

Schliesslich werden wir im Abschnitt 6. das lineare Dekompositionsprinzip auf das Mehrproduktmodell anwenden, wobei sowohl Schranken bezüglich Erneuerungsmengen und Lagergrössen für jedes einzelne Produkt als auch gemeinsame Lagerkapazität für alle Produkte berücksichtigt werden.

---

[1] Vgl. G.B. DANTZIG [2], S. 507-528.

2. Modellelemente

Bei dem WAGNER-WHITIN Modelltyp besteht eine Stufe[1] aus einer Lagerstelle, wobei der Erneuerungsprozess durch Zulieferung geschieht. Diese Stufe kann sich auch aus einer Lager- und Produktionsstelle zusammensetzen[2].

Der Planungszeitraum ist endlich und diskret und besteht aus T äquidistanten Teilzeitintervallen (TZI).

Zu Beginn eines TZI t ($t \in \mathbb{T}=\{1,\ldots,T\}$) erfolgt Erneuerung mit unendlicher Erneuerungsrate, nichtnegativer Erneuerungsmenge q_t und Erneuerungsfrist von Null. Erneuerungsmenge kann vorgegebene positive Schranke E_t ($t \in \mathbb{T}$) nicht überschreiten. Falls Erneuerungsfrist grösser Null im Modell eingeführt ist, erfolgt Erneuerung dann nicht mehr unmittelbar nach dem Erneuerungsentscheid, sondern erst nach dem Ablauf der Erneuerungsfrist[3].

Der deterministische Bedarf mit nichtnegativer Bedarfsmenge r_t ($t \in \mathbb{T}$) wird nach der Erneuerung sofort mit unendlicher Bedarfsrate wirksam. Bedarfsverlust ist nicht zugelassen.

Die Lagergrösse vor Erneuerung x_t ($t \in \mathbb{T} \cup \{0\}$) kann beliebig endlich sein und wird mit $x_t^+ \geq 0$ bzw. $-x_t^-$ ($x_t^- \geq 0$) bezeichnet, falls sie nichtnegative bzw. nichtpositive Werte annimmt. Sie kann die vorgegebene positive Schranke L_t ($t \in \mathbb{T}$) nicht überschreiten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass

---

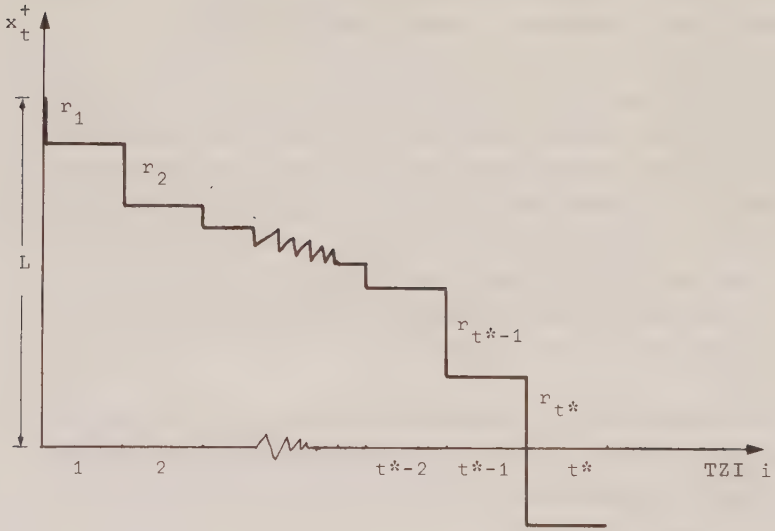
[1] Vgl. W. POPP a.a.O., S. 2-19.

[2] Vgl. W.I. ZANGWILL [24].

[3] Vgl. W. POPP a.a.O., S. 81-83.

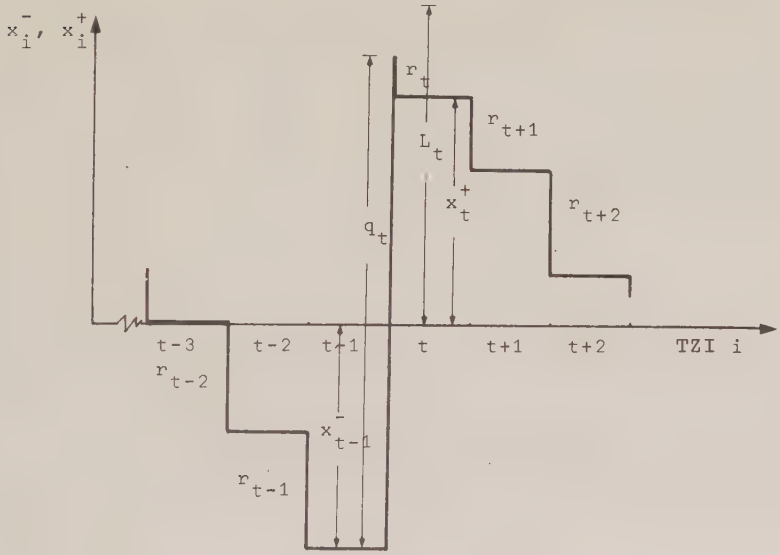
das Lager sowohl zu Beginn als auch am Ende des Planungszeitraumes leer sein soll. Falls dies nicht zutrifft, verfahren wir folgendermassen:

1. Im Fall $x_0^+=L$ wird der Bedarf bis t^*-1 befriedigt, wobei t^* der kleinste Wert ist, so dass die Beziehung $r_{t^*}\geq 0$ für $r_{t^*}=\sum_1^{t^*} r_i - L$ gilt. Ab t^* beginnt dann der Algorithmus mit der Bedarfsmenge r_{t^*}. Vgl. dazu die folgende Abbildung.



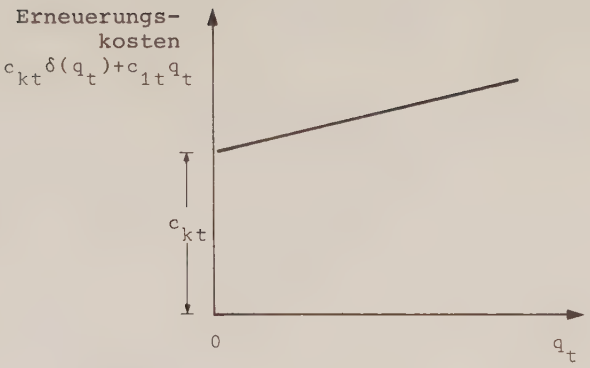
2. Im Fall $x_T^+=L$ führen wir ein fiktives TZI (T+1) ein, in welchen alle Kostensätze den Wert Null haben und die Bedarfsmenge den Wert $r_{T+1}=L$ besitzt. Vgl. dazu die folgende Abbildung.

In den TZI t-1 und t-2 tritt der Verzug auf, und zu Beginn des TZI t erfolgt Erneuerung mit Erneuerungsmenge q_t, so dass die Lagergrössen innerhalb der vier folgenden TZI auf Null vermindert werden. Dabei gilt $x_t^+ < L_t$.

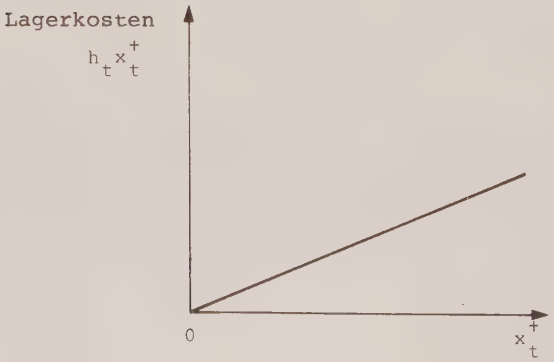


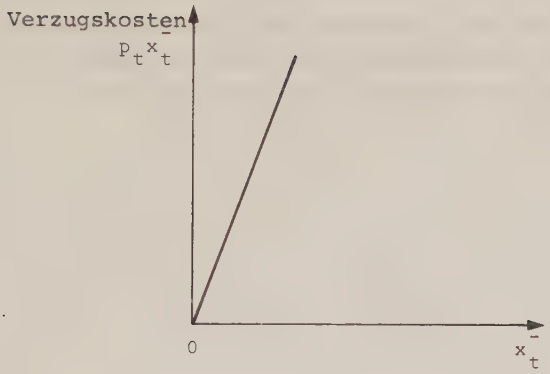
Das Wertsystem des Modelles besteht aus Kosten.

Erneuerungskosten sind durch $c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t$ definiert, wobei c_{kt} und c_{1t} zeitlich variierende erneuerungsfixe und erneuerungsproportionale Kosten sind. Die Indikatorvariable $\delta(q_t)$ ist gleich Null für $q_t=0$ und gleich eins für $q_t>0$. Vgl. die folgende Abbildung.



Lager- bzw. Verzugskosten je Mengenteilzeitintervall mit h_t bzw. p_t können mit der Zeit variieren. Die Kostenfunktionen in Abhängigkeit von der Lagergrösse x_t sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.





Sei a der Diskontfaktor. Die diskontierten Kosten für den gesamten Planungszeitraum sind dann gleich

$$\sum_1^T a^t [c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t+h_t x_t^+ + p_t x_t^-] \text{ bzw.}$$

$$\sum_1^T [c'_{kt}\delta(q_t)+c'_{1t}q_t+h'_t x_t^+ + p'_t x_t^-], \text{ wobei}$$

$c'_{1t}=c_{1t}a^t$, $c'_{kt}=c_{kt}a^t$, $h'_t=h_t a^t$ und $p'_t=p_t a^t$ gelten.
Wir sehen, dass die Diskontierung auf die einzelnen Kostenelemente bezogen werden kann. Dadurch gelten die folgenden im Fall ohne Diskontierung abgeleiteten Theoreme auch für den Fall mit Diskontierung.

Alle diese Modellelemente gelten für jedes Produkt k ($k\in K=\{1,\ldots,K\}$). Ferner seien V das Gesamtlagervolumen und d^k der dem k-ten Produkt entsprechende Volumenkoeffizient.

Für die im Abschnitt 1 erwähnten Modellerweiterungen sind die Erneuerungsmenge und die Lagergrösse als Entscheidungsvariablen so zu bestimmen, dass die gesamten Kosten für den Planungszeitraum minimiert werden.

Bei Anwendung der vorwärtsdynamischen bzw. linearen gemischt-ganzzahligen Programmierung treten q_t bzw. x_t^+, x_t^-, q_t und die (0-1)-Variablen y_t als Entscheidungsvariablen auf, wie an späterer Stelle zu ersehen ist.

3. Grundmodell

Für den gesamten Planungszeitraum sind die Kosten

$$(3.1) \qquad \sum_1^T [c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t+h_t x_t]$$

unter den Restriktionen

$$(3.2) \qquad x_{t-1}-x_t+q_t=r_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

$$(3.3) \qquad 0\leq x_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

$$(3.4) \qquad 0\leq q_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

$$(3.5) \qquad x_0=x_T=0$$

zu minimieren, wobei (3.2) bzw. (3.3) und (3.4) die Lagergleichung bzw. die Nichtnegativitätsbedingungen für Lagergrösse und Erneuerungsmenge darstellen. Als Entscheidungsvariablen treten q_t und x_t auf.
Falls c_{1t} konstant im Zeitverlauf ist, erhalten wir das WAGNER-WHITIN Modell.
Da die Restriktionen (3.2)-(3.5) eine nach unten beschränkte abgeschlossene und konvexe Menge[1] $\mathbb{Q}$ bilden und da die Zielfunktion (3.1) konkav[2] über $\mathbb{Q}$ ist, wird das endliche globale

---

[1] 1. Eine Menge $\mathbb{Q}$ von Punkten ist konvex, wenn für beliebige Q^1, $Q^2\in\mathbb{Q}$ und für alle λ gilt: $\lambda Q^1+(1-\lambda)Q^2=Q$, $Q\in\mathbb{Q}$, $0\leq\lambda\leq 1$.
2. Die Menge $\{Q \mid AQ=b, Q\geq 0\}$ ist nach unten beschränkt, abgeschlossen und konvex. Vgl. G. HADLEY [8], S. 58, 60.

[2] Die Funktion $f(Q)$ heisst konkav über einen konvexen Bereich $\mathbb{Q}$, wenn für zwei beliebige Punkte Q^1 und Q^2 aus $\mathbb{Q}$ und für alle λ, $0\leq\lambda\leq 1$, $f(\lambda Q^2+(1-\lambda)Q^1)\geq\lambda f(Q^2)+(1-\lambda)f(Q^1)$ gilt. Vgl. G. HADLEY [9], S. 113.

Minimum von (3.1) in einem oder in mehreren Eckpunkten[1] von $\mathbb{Q}$ angenommen[2].

3.1 Lineare gemischt-ganzzahlige Programmierung

Wenn die erneuerungsfixen Kosten nicht in Betracht gezogen werden, dann ist die Zielfunktion (3.1) linear. Wir können dann das Grundmodell mit Hilfe der linearen Programmierung lösen. Hier haben wir aber ein "Fixkostenproblem", das in der Literatur mit der linearen gemischt-ganzzahligen Programmierung formuliert wird[3]. Dabei führen wir eine positive Zahlen M und die (0-1)-Variablen y_t ($t\in\mathbb{T}$) ein. Die Modellformulierung lautet dann:

$$\min \sum_1^T [c_{kt}y_t + c_{1t}q_t + h_t x_t] \tag{3.6}$$

$$0 \le y_t M - q_t, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{3.7}$$

$$0 \le y_t \le 1, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{3.8}$$

$$y_t \text{ ganzzahlig}, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{3.9}$$

(3.2)-(3.5).

Hier treten q_t, x_t und y_t als Entscheidungsvariablen auf. Die Restriktionen (3.7)-(3.9) gewährleisten, dass entweder

---

[1] Ein Punkt Q ist ein Eckpunkt einer konvexen Menge $\mathbb{Q}$ dann und nur dann, wenn keine anderen Punkte Q^1 und Q^2 ($Q^1 \neq Q^2$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass $\lambda Q^1 + (1-\lambda)Q^2 = Q$ $(0<\lambda<1)$ gilt. Vgl. G. HADLEY [8], S. 59.

[2] Vgl. G. HADLEY [9], S. 125.

[3] Vgl. ebenda S. 174.

$q_t>0$ und $y_t=1$ oder - wegen der Kostenminimierung - $q_t=0$ und $y_t=0$ gelten. Da $q_t\leq\sum_t^T r_i$ für alle t gilt, können wir in (3.7) die Werte $M=\sum_t^T r_i$ für alle t wählen.

3.2 Dynamische Programmierung

Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt wurde, werden wir nur den Vorwärtsalgorithmus betrachten.

Es seien:

1. $H_v^*(x_v)$ die minimalen Kosten für die TZI 1 bis v, wenn der Lagerbestand am Ende des TZI v gleich x_v ist,
2. H_v die Kosten im TZI v.

Die Rekursionsformel der vorwärtsdynamischen Programmierung lautet dann:

$$H_v^*(x_v)=\min_{q_v}\,[c_{kv}\delta(q_v)+c_{1v}q_v+h_v x_v+H_{v-1}^*(x_{v-1})],\ \forall v\in\mathbb{T}, \qquad (I)$$

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H_0^*(0)=0$.

Aus (3.2)-(3.4) folgt:

$$x_{v-1}=x_v-q_v+r_v,$$

$$0\leq x_v-q_v+r_v,$$

$$0\leq q_v$$

oder

$$x_{v-1}=x_v-q_v+r_v,$$

$$0\leq q_v\leq x_v+r_v.$$

Da H_v gleich $c_{kv}\delta(q_v)+c_{1v}q_v+h_v x_v$ ist, erhalten wir nach

Einsetzen in (I):

$$H_v^*(x_v) = \min_{0 \le q_v \le x_v + r_v} [H_v + H_{v-1}^*(x_v - q_v + r_v)]$$

oder

$$H_v^*(x_v) = \min_{0 \le q_v \le x_v + r_v} (H_v + \min_{0 \le q_{v-1} \le x_{v-1} + r_{v-1}} [H_{v-1} + H_{v-2}^*(x_{v-2})]).$$

Aus $x_{v-1} = x_v - q_v + r_v$ und $x_{v-2} = x_{v-1} - q_{v-1} + r_{v-1}$ folgt:

$$H_v^*(x_v) = \min_{\substack{0 \le q_v \le x_v + r_v \\ 0 \le q_v + q_{v-1} \le x_v + r_v + r_{v-1}}} [H_v + H_{v-1} + H_{v-2}^*(x_v - q_v - q_{v-1} + r_v + r_{v-1})].$$

Im allgemeinen kann (I) so geschrieben werden:

$$H_v^*(x_v) = \min_{0 \le \sum_t^v q_k \le x_v + \sum_t^v r_k} [\sum_{u+1}^v H_t + H_u^*(x_v - \sum_{u+1}^v q_i + \sum_{u+1}^v r_i)], \quad \forall v \in \mathbb{T},$$
$$u < t \le v$$

$\forall u \in \mathbb{T} \cup \{0\}$, (II)

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H_0^*(0) = 0$.

Bevor wir die Rekursionsformel (II) weiter umformen, so dass sie für die Berechnung geeignete Form annimmt, werden wir jetzt einige spezielle Eigenschaften der Eckpunkte untersuchen, um den Rechenaufwand reduzieren zu können.

Definition

1. Ein Nichtlagerteilzeitintervall (NLTZI) u ($u \in \mathbb{T} \cup \{0\}$) ist ein TZI mit einem leeren Lager.
2. Ein Erneuerungsteilzeitintervall (ETZI) t ($t \in \mathbb{T}$) ist ein TZI mit einer Erneuerung. Ein ETZI kann mit einem NLTZI zusammenfallen.

Wir betrachten nun den Vektor[1] $Q=(q_1 \ldots q_T \; x_1 \ldots x_T)$ und die nach unten beschränkte abgeschlossene konvexe Menge $\mathfrak{Q}=\{Q' \mid (3.2)-(3.5)\}$.
Eine Basislösung eines linearen Programmierungsproblemes mit n Variablen und m Restriktionen - ausgenommen die Nichtnegativitätsbedingungen - hat höchstens m nichtnegative Werte. Daraus folgt, dass wir bei unserem Problem mit 2T Variablen q_t und x_t ($t \in \mathbb{T}$) und T+1 Restriktionen maximal T+1 nichtnegative Werte für die optimale Lösung erhalten. Eine solche Lösung wäre zum Beispiel $q_t>0$ und $x_t=0$ für alle t.
Aus (3.2) und (3.3) folgt

$$x_{t-1}=\sum_1^{t-1}(q_i-r_i), \tag{3.10}$$

$$\sum_1^{t-1} q_i \geq \sum_1^{t-1} r_i \tag{3.11}$$

bzw.

$$x_t=\sum_1^{t}(q_i-r_i), \tag{3.12}$$

$$\sum_1^{t} q_i \geq \sum_1^{t} r_i. \tag{3.13}$$

Falls $x_{t-1}=0$ ist, dann gilt $q_t=\sum_1^{t-1} q_i-\sum_1^{t-1} r_t+q_t$.
Aus (3.13) folgt $q_t+\sum_1^{t-1} q_i-\sum_1^{t-1} r_i \geq r_t$, so dass $q_t \geq r_t$ gilt.
Falls $r_t>0$ ist, dann muss $q_t>0$ sein.
Umgekehrt gilt $\sum_1^{t-1} q_i-\sum_1^{t-1} r_i \geq r_t$, falls $q_t=0$ ist.
Aus (3.10) folgt $x_{t-1} \geq r_t$.
Ist $r_t>0$, dann muss $x_{t-1}>0$ sein.
Diese Ueberlegungen führen uns zu dem folgenden Theorem.

---

[1] Q' ist der transponierte Zeilenvektor Q.

Theorem 1

Der Vektor Q ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, wenn sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v (u<v) höchstens ein ETZI (u+1) befindet.

Beweis:

Der Beweis wird durch Widerspruch durchgeführt.

1. Sei Q ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, so dass sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v (u<v) zwei ETZI $t^1=u+1$ und t^2 ($t^1<t^2\leq v$) befinden. Wir werden zeigen, dass Q kein Eckpunkt ist, d.h. zwei Punkte $Q^1=(q_1^1\ldots q_T^1\ x_1^1\ldots x_T^1)$ und $Q^2=(q_1^2\ldots q_T^2\ x_1^2\ldots x_T^2)$ aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass $Q=\lambda Q^1+(1-\lambda)Q^2$ $(0<\lambda<1)$ gilt. Wir betrachten die folgenden Patitionen der Vektoren:

$$Q=[V=(q_1\ldots q_T),\ X=(x_1\ldots x_T)],$$

$$Q^1=[V^1=(q_1^1\ldots q_T^1),\ X^1=(x_1^1\ldots x_T^1)],$$

$$Q^2=[V^2=(q_1^2\ldots q_T^2),\ X^2=(x_1^2\ldots x_T^2)].$$

Aus $Q=\lambda Q^1+(1-\lambda)Q^2$ $(0<\lambda<1)$ folgt:

$$X=\lambda X^1+(1-\lambda)X^2 \quad (0<\lambda<1),$$

(A)

$$V=\lambda V^1+(1-\lambda)V^2 \quad (0<\lambda<1).$$

Aus $\lambda>0$, $(1-\lambda)>0$ und (3.3)-(3.5) folgt $x_t^1=x_t^2=0$ bzw. $q_t^1=q_t^2=0$ $(\forall t\in\mathbb{T})$, wenn $x_t=0$ bzw. $q_t=0$ $(\forall t\in\mathbb{T})$ ist. Für t^1 und t^2 haben wir:

$$q_t1=\lambda q_t^1 1+(1-\lambda)q_t^2 1,$$

$$q_t2=\lambda q_t^1 2+(1-\lambda)q_t^2 2.$$

Seien $\lambda=1/2$ und η eine positive Zahl, die an späterer Stelle zu wählen ist.
Wir bilden Q^1 und Q^2, so dass

$$q_t^1=q_t=q_t^2, \ \forall t\in\mathbb{T}-\{t^1, t^2\},$$

$$q_t^1 1=q_t 1+\eta,$$

$$q_t^2 1=q_t 1-\eta,$$

$$q_t^1 2=q_t 2-\eta,$$

$$q_t^2 2=q_t 2+\eta \text{ gelten.}$$

Damit ist $V=(V^1+V^2)/2$ erfüllt.
Aus der Lagergleichung (3.2) folgt:

(C) $$x_t=\sum_1^t(q_i-r_i), \ \forall t\in\mathbb{T}.$$

Aus (B) folgt:

(D)
$$\sum_1^{t^2}(q_i^1-r_i)=\sum_1^{t^2}(q_i^2-r_i)=\sum_1^{t^2}(q_i-r_i),$$

$$\sum_1^t(q_i^1-r_i)=\sum_1^t(q_i-r_i)=\sum_1^t(q_i^2-r_i), \ t<t^1, \ t>t^2,$$

$$\sum_1^t(q_i^1-r_i)=\sum_1^t(q_i-r_i)+\eta, \ t^1\le t<t^2,$$

$$\sum_1^t(q_i^2-r_i)=\sum_1^t(q_i-r_i)-\eta, \ t^1\le t<t^2.$$

Aus (C) und (D) erhalten wir:

$$x_t^1=x_t=x_t^2, \ t<t^1, \ t\ge t^2,$$

(E) $$x_t^1=x_t+\eta, \ t^1\le t<t^2,$$

$$x_t^2=x_t-\eta, \ t^1\le t<t^2.$$

Für beliebiges η ist danach X gleich $(X^1+X^2)/2$ und Q ist gleich $(Q^1+Q^2)/2$.
Es bleiben noch die Nichtnegativitätsbedingungen für Lagergrösse und Erneuerungsmenge zu prüfen, d.h.

$$q_t^1 \geq 0,\ q_t^2 \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{T}-\{t^1, t^2\},$$

$$q_t^1 \pm \eta \geq 0,\ q_t^2 \pm \eta \geq 0,$$

$$x_t^1 \geq 0,\ x_t^2 \geq 0,\ t<t^1,\ t \geq t^2,$$

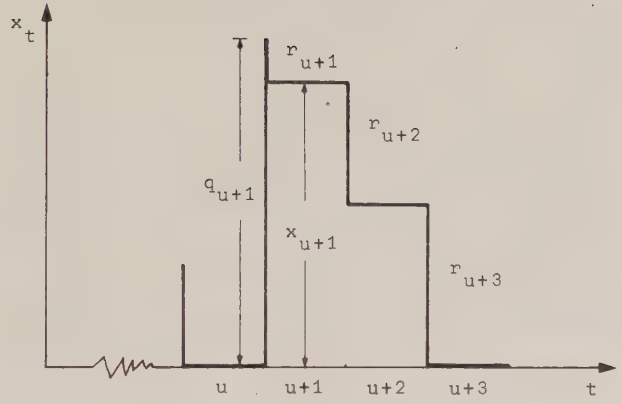
$$x_t+\eta \geq 0,\ x_t-\eta \geq 0,\ t^1 \leq t < t^2.$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen sind erfüllt, wenn wir wählen:

$$\eta = \min\left[q_t^1,\ q_t^2,\ \min_{t^1 \leq t < t^2} x_t\right], \text{ wobei } \eta>0 \text{ ist.}$$

Da Q^1 und Q^2 aus $\mathbb{Q}$ mit $Q^1 \neq Q^2$ und Q gleich $(Q^1+Q^2)/2$, ist Q definitionsgemäss kein Eckpunkt.

2. Umgekehrt betrachten wir einen Vektor Q, so dass sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v höchstens ein ETZI $t^1=u+1$ befindet.
Wir werden zeigen, dass ein solcher Vektor einen Eckpunkt darstellt, d.h. keine anderen zulässigen Vektoren Q^3 und Q^4 $(Q^3 \neq Q^4)$ aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass $\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4=Q$ für $0<\lambda<1$ gilt. Vgl. die folgende Abbildung.



Es sei angenommen, dass zwei zulässige Vektoren Q^3 und Q^4 ($Q^3 \neq Q^4$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, und dass

$$\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4=Q \quad (0<\lambda<1) \text{ gilt.}$$

Wir betrachten die folgende Partitionen der Vektoren:

$$Q=[V=(q_1 \ldots q_T), X=(x_1 \ldots x_T)],$$

$$Q^3=[V^3=(q_1^3 \ldots q_T^3), X^3=(x_1^3 \ldots x_T^3)],$$

$$Q^4=[V^4=(q_1^4 \ldots q_T^4), X^4=(x_1^4 \ldots x_T^4)].$$

Aus $\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4=Q$ $(0<\lambda<1)$ folgt:

$$X=\lambda X^3+(1-\lambda)X^4 \quad (0<\lambda<1),$$

$$V=\lambda V^3+(1-\lambda)V^4 \quad (0<\lambda<1).$$

Da $\lambda>0$, $(1-\lambda)>0$ und $x_u=x_v=0$ sind, müssen $x_u^3=x_v^3=x_u^4=x_v^4=0$

gelten. Analog gilt $q_t=q_t^3=q_t^4=0$ für $u+1<t\leq v$. Aus der Annahme und aus (3.2) existiert aber ein einziges $q_t 1=q_{u+1}=\sum_{u+1}^{v} r_t$, so dass $x_u^3=x_v^3=x_u^4=x_v^4=x_u=x_v=0$ gelten. Wir haben dann:

$$q_{u+1}=q_t^3=q_t^4,\ u+1\leq t\leq v.$$

Die obige Betrachtung gilt für alle Paare (u,v) und für alle Q^3 und Q^4 aus $\mathbb{Q}$.
Q müss ein Eckpunkt sein, da keine anderen zulässigen Vektoren Q^3 und Q^4 ($Q^3\neq Q^4$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass

$$Q=\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4\ (0<\lambda<1)\ \text{gilt.}$$

Der Beweis lässt sich ganz analog auf den Fall von mehr als zwei ETZI und dem aller Paare (u,v) erweitern.

Aus dem Vorhergehenden erhalten wir[1]:

1. Bei einer optimalen Entscheidungsregel können wir erst dann erneuern, wenn das Lager leer ist.
2. Bei einer optimalen Entscheidungsregel sind die Erneuerungsmengen gleich der Summe der Bedarfswerte unmittelbar folgender TZI.

Wie in 3.2 bereits erwähnt wurde, führt das Theorem 1 zu der folgenden alternativen Formulierung der Rekursionsformel.

Rekursionsformel

Für zwei beliebige sukzessive NLTZI u und v haben wir:

---

[1]Vgl. W. POPP a.a.O., S. 56-57, H.M. WAGNER, T.M. WHITIN [23].

$$q_{u+1}=\sum_{u+1}^{v} r_i,$$

$$x_k=\sum_{k+1}^{v} r_i \quad (u<k<v).$$

Sei $H(u+1,v)$ die Kosten für die TZI $(u+1)$ bis v unter der Bedingung, dass das ETZI gleich $(u+1)$ ist, und dass die minimalen Kosten für die TZI 1 bis u gleich $H^*(u)$ sind, d.h.

$$(F)\quad H(u+1,v)=c_{k,u+1}+c_{1,u+1}\left(\sum_{u+1}^{v} r_i\right)+\sum_{u+1}^{v-1}\left(h_j\sum_{j+1}^{v} r_i\right).$$

Die Rekursionsformel (II) kann folgendermassen umgeschrieben werden:

$$H^*(v)=\min_{0\le u<v}\ [H^*(u)+H(u+1,v)],\ \forall v\in\mathbb{T}, \qquad (III)$$

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H^*(0)=0$.

Bei der Berechnung der optimalen Lösung sind folgende Beziehungen zu beachten:

1. Aus (F) folgt:

$$H(u+1,v-1)=c_{k,u+1}+c_{1,u+1}\left(\sum_{u+1}^{v-1} r_i\right)+\sum_{u+1}^{v-2}\left(h_j\sum_{j+1}^{v-1} r_i\right).$$

Wir haben dann:

$$H(u+1,v)=H(u+1,v-1)+\left(c_{1,u+1}+\sum_{u+1}^{v-1} h_j\right)r_v.$$

2. Setzen wir $l_{u+1,v+1}=c_{1,u+1}+\sum_{u+1}^{v} h_j$, so gilt:

$$H(u+1,v+1)=H(u+1,v)+l_{u+1,v+1}\,r_{v+1}.$$

Aus der Definition von $l_{u+1,v+1}$ folgt:

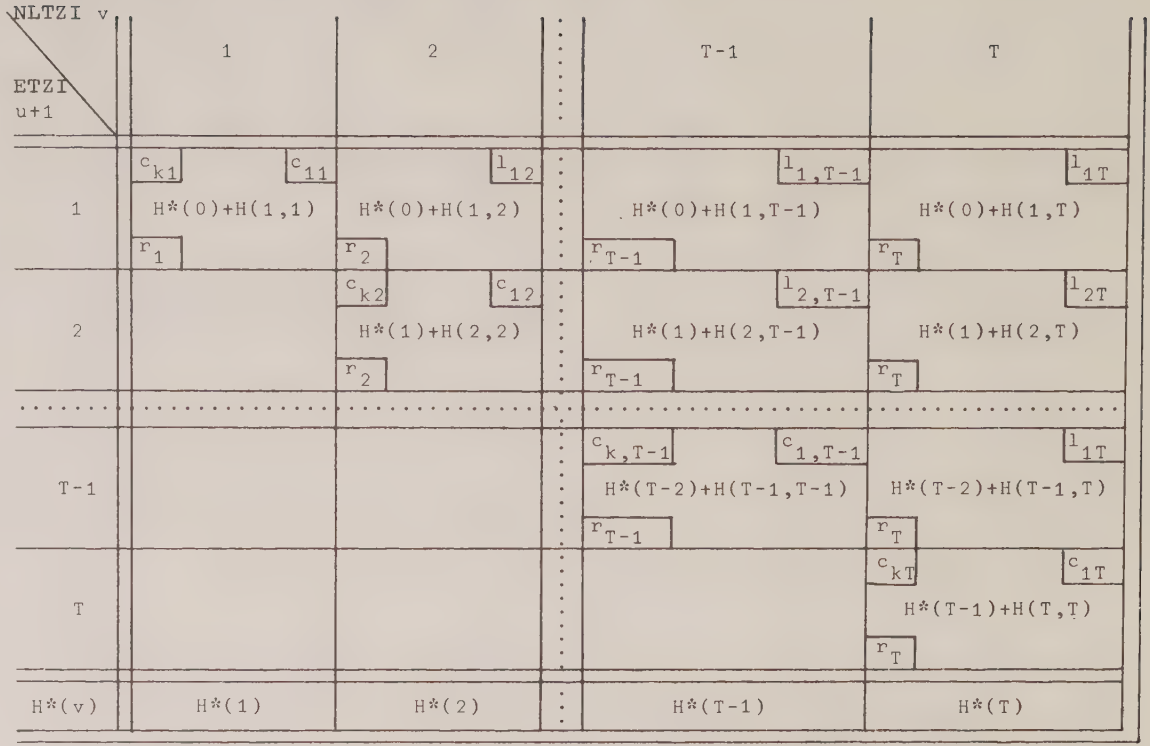
$$l_{u+1,v+1}=l_{u+1,v}+h_v.$$

Wir berechnen dann die optimale Lösung anhand des folgenden Tableaus, das sowohl die vorgegebenen r_v, c_{kv}, c_{1v} als auch die zu berechnenden l_{uv}, $H^*(v)$ und $H(u,v)$ enthält.
Wir verfahren folgendermassen:

1. Für die Berechnung von $H^*(v)$ gehen wir von den Werten der $(v-1)$-ten Spalte aus.
2. Für das Feld (u,v) gilt:

$$H^*(u-1)+H(u,v)=l_{uv}r_v+H^*(u-1)+H(u,v-1), \text{ für } v-1\geq u.$$

3. Die minimalen Kosten $H^*(v)$ sind gleich $\min_u [H^*(u-1)+H(u,v)]$ und werden in der letzten Zeile des Tableaus eingetragen.


NLTZI v
ETZI u+1
1
2
T-1
T
1
2
T-1
T
c_{k1} c_{11} l_{12} $l_{1,T-1}$ l_{1T}
H*(0)+H(1,1)
H*(0)+H(1,2)
H*(0)+H(1,T-1)
H*(0)+H(1,T)
r_1 r_2 r_{T-1} r_T
c_{k2} c_{12} $l_{2,T-1}$ l_{2T}
H*(1)+H(2,2)
H*(1)+H(2,T-1)
H*(1)+H(2,T)
r_2 r_{T-1} r_T
$c_{k,T-1}$ $c_{1,T-1}$ l_{1T}
H*(T-2)+H(T-1,T-1)
H*(T-2)+H(T-1,T)
r_{T-1} r_T
c_{kT} c_{1T}
H*(T-1)+H(T,T)
r_T
H*(v)
H*(1)
H*(2)
H*(T-1)
H*(T)

Beispiel 3.1

Für alle zu berechnenden Beispiele werden die Daten in einer Matrix $A=(a_{it})$ eingetragen, wobei der Zeilenindex i bzw. der Spaltenindex t sich auf Bedarf und Kostenkoeffizienten (BKo) bzw. TZI t bezieht.

BKo \ TZI	1	2	3	4
r_t	5	11	13	20
c_{kt}	15	14	16	17
c_{1t}	7	6	9	10
h_t	1	2	4	3

ETZI u+1 \ NLTZI v	1	2	3	4
1	[15] [7] 50 [5]	[8] 138 [11]	[10] 268 [13]	[14] 548 [20]
2		[14] [6] 130 [11]	[8] 234 [13]	[12] 474 [20]
3			[16] [9] 263 [13]	[13] 523 [20]
4				[17] [10] 451 [20]
H*(v)	50	130	234	451

Wir betrachten zum Beispiel das Feld $(u+1,v)=H(2,2)$.

Wir haben dann:

$$c_{1v}=c_{12}=6,$$
$$c_{kv}=c_{k2}=4,$$
$$r_v=r_2=11,$$

$H^*(1)+H(2,2)=50+14+66=130.$

Für das Feld $(u+1,v)=(2,3)$ erhalten wir:

$l_{23}=c_{12}+h_2=6+2=8,\ r_3=3,$

$H^*(1)+H(2,3)=l_{23}r_3+H^*(1)+H(2,2)=104+130=234.$

Für die Berechnungen anderer Felder verfahren wir analog wie oben.

Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=5,\ q_2^*=24,\ q_3^*=0,\ q_4^*=20.$

Anhand der Rekursionsformel (III) werden wir die folgenden Fälle noch näher untersuchen.

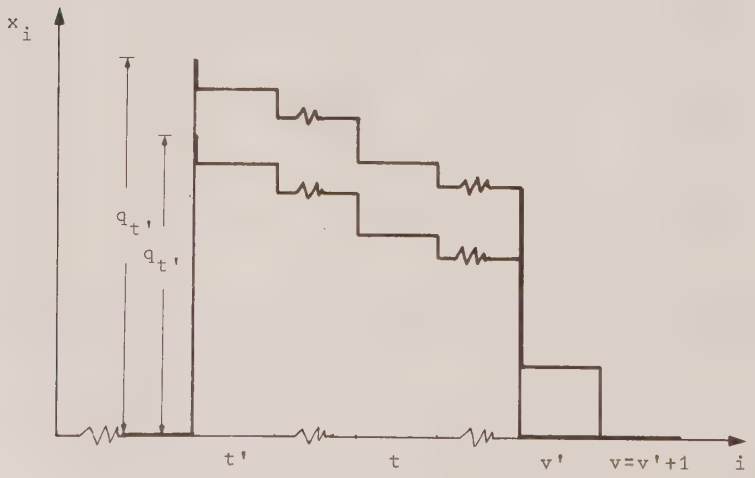
Fall 1 : c_{1t} beliebig im Zeitverlauf

Corollar 1.1

Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, zum letzten Mal zu Beginn des TZI t' ($1 \leq t' \leq v'$) zu erneuern, dann sind t' und die ETZI t, die die Bedingungen $l_{t,v'+1} < l_{t',v'+1}$ ($1 \leq t \leq v'+1$) erfüllen, entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v'+1.

Beweis:

Wir werden zeigen, dass die in Frage kommenden ETZI Bedingungen, die wir später angeben, erfüllen müssen. Um diese ETZI lokalisieren zu können, vergleichen wir die Kosten H(v) mit den Kosten H*(t'-1)+H(t',v'+1), wobei H(v) gleich H*(t-1)+H(t,v) für beliebiges t ($0 < t \leq v$) ist.
Zur Veranschaulichung des Beweises benützen wir die folgende Abbildung.



Aus (III) folgt $H(v'+1)=H^*(t-1)+H(t,v'+1)$ für beliebiges t.
Für $1\leq t\leq v'$ gilt dann:

$$H(v'+1)=H^*(t-1)+H(t,v')+l_{t,v'+1}r_{v'+1}.$$

Analog gilt:

$$H(t',v'+1)=H(t',v')+l_{t',v'+1}r_{v'+1}.$$

Wir erhalten dann:

$$H(v'+1)-H^*(t'-1)-H(t',v'+1)=H^*(t-1)+H(t,v')-H^*(t'-1)-$$

$$-H(t',v')+(l_{t,v'+1}-l_{t',v'+1})r_{v'+1}.$$

Sei $\Delta=l_{t,v'+1}-l_{t',v'+1}$.

Aus der Annahme gilt $H^*(t-1)+H(t,v')\geq H^*(t'-1)+H(t',v')$. Ist
$H(v'+1)<H^*(t'-1)+H(t',v'+1)$, dann muss Δ negativ für $t\neq t'$ sein.
Für $t=t'$ haben wir $\Delta=0$ und $H(v'+1)=H^*(t'-1)+H(t',v'+1)$.
Gilt immer $H^*(t'-1)+H(t',v'+1)\leq H(v'+1)$, dann ist $\Delta\geq 0$.
Für $v'+1=t$ gilt:

$$H(v'+1)=H^*(v')+c_{1,v'+1}r_{v'+1}+c_{k,v'+1},$$

$$H(v'+1)-H^*(t'-1)-H(t',v'+1)=c_{k,v'+1}+c_{1,v'+1}r_{v'+1}-$$

$$-c_{1t'}r_{v'+1}-(\sum_{t'}^{v'}h_j)r_{v'+1}.$$

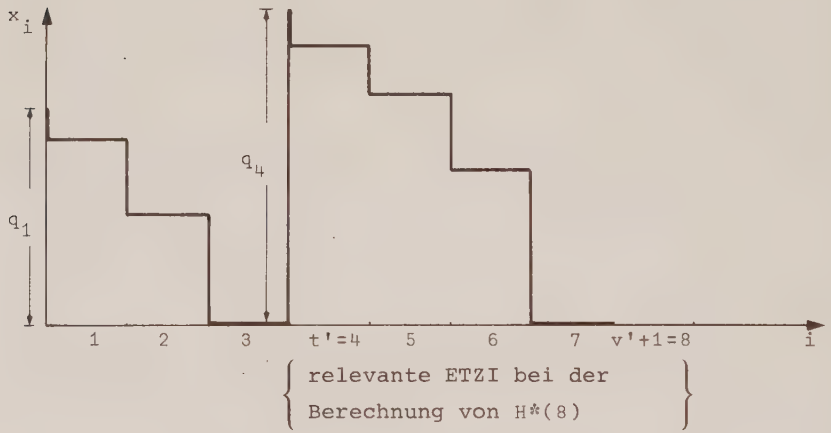
Wir haben dann:

$$H(v'+1)-H^*(t'-1)-H(t',v'+1)=c_{k,v'+1}+(c_{1,v'+1}-c_{1t'}-\sum_{t'}^{v'}h_.)r_{v'+1}.$$

Dieselben Schlussfolgerungen erhalten wir für $1\leq t\leq v'$.

Zur Veranschaulichung des Corollars 1.1. Vgl. die folgende Abbildung.

Es sei angenommen, dass $l_{t8} > l_{48}$ für $t \leq 3$ gilt. Wir brauchen dann nur die ETZI $t=4,5,6,7,8$ bei der Berechnung der minimalen Kosten für die TZI 1 bis 8 zu berücksichtigen.



Corollar 1.2
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, zum letzten Mal zu Beginn des TZI t' zu erneuern und wenn für t' die Bedingungen $l_{t'v'} \leq l_{tv'}$ für $1 \leq t \leq v'$ gelten, dann sind die ETZI t und t' ($v' \leq t \leq v$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($t' \leq v' < v \leq T$).

Beweis:
Nach dem Corollar 1.1 haben wir $H^*(t'-1)+H(t',v'+1) \leq H(v'+1)$, wenn $l_{t',v'+1} \leq l_{t,v'+1}$ gilt.

Aus $l_{t',v'} \leq l_{tv'}$ folgt $l_{t',v'}+h_{v'} \leq l_{tv'}+h_{v'}$ oder
$l_{t',v'+1} \leq l_{t,v'+1}$ für $1 \leq t \leq v'$.
Nehmen wir an, dass $l_{t',v} \leq l_{tv}$ für $1 \leq t \leq v'$ gilt.
Aus $l_{t',v} \leq l_{tv}$ folgt $l_{t',v}+h_v \leq l_{tv}+h_v$ oder $l_{t',v+1} \leq l_{t,v+1}$.
Damit haben wir das Corollar für alle v ($v' < v \leq T$) bewiesen.

Beispiel 3.2

Unter Berücksichtigung des Theorems 1 und der Corollars 1.1 und 1.2 erhalten wir für das Beispiel 3.1 das folgende Tableau.

NLTZI v / ETZI u+1	1	2	3	4
1	15 7 50 5	8 138 11	10 13	14 20
2		14 6 130 11	8 234 13	12 474 20
3			16 9 13	13 20
4				17 10 451 20
H*(v)	50	130	234	451

Wir betrachten zum Beispiel das Feld $(u+1,v)=(1,3)$.

Wir haben:

$$t'=2,\ v'+1=3,$$

$$l_{t',v'+1}=8,$$

$$l_{t,v'+1}=10 \text{ für } t=1,$$

$$l_{t,v'+1}=9 \text{ für } t=3.$$

Nach dem Corollar 1.1 gilt:

$$l_{t,v'+1}>l_{t',v'+1} \quad (1\leq t\leq v'+1).$$

Wir brauchen dann nur die Kosten des Feldes $(2,3)$ zu berechnen.

Für die Berechnungen anderer Felder verfahren wir analog wie oben.

Die optimale Lösung ist dann:

$q_1^*=5,\ q_2^*=24,\ q_3^*=0,\ q_4^*=20.$

Fall 2 : $c_{1,t+1} \leq c_{1t}$, $\forall t \in \mathbb{T}-\{T\}$

Corollar 1.3

Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, zum letzten Mal zu Beginn des TZI t' zu erneuern, dann sind die ETZI t ($t' \leq t \leq v$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($v' < v$).

Beweis:

Wir werden zeigen, dass das Corollar 1.2 hier immer zutrifft.
Seien die Bedingungen $l_{t'v'} \leq l_{tv'}$ oder
$c_{1t'} + \sum_{t'}^{v'-1} h_j \leq c_{1t} + \sum_{t}^{v'-1} h_j$ für $1 \leq t \leq t'$.
Aus $c_{1t'} \leq c_{1t}$ für $t < t'$ folgt, dass die Bedingungen
$l_{t'v'} \leq l_{tv'}$ des Corollars 1.2 immer erfüllt sind.

Beispiel 3.3

BKo \ TZI	1	2	3	4
r_t	12	10	13	9
c_{kt}	16	14	11	17
c_{1t}	8	6	5	3
h_t	1	2	4	7

NLTZI v / ETZI u+1	1	2	3	4
1	16 8 112 12	9 202 10	11 13	15 9
2		14 6 186 10	8 290 13	12 9
3			11 5 262 13	9 343 9
4				17 3 306 9
H*(v)	112	186	262	306

Wir betrachten zum Beispiel das Feld $(2,3)=(u+1,v'+1)$. Für die TZI 1 bis 2 ist es optimal, zum letzten Mal zu Beginn des TZI $t'=2$ zu erneuern. Die ETZI t $(2\leq t\leq 3)$ sind dann entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis 3, d.h. wir brauchen nur die Kosten der Felder $(2,3)$ und $(3,3)$, zu berechnen.
Wir verfahren ganz analog wie oben für alle Felder des Tableaus.
Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=12$, $q_2^*=10$, $q_3^*=13$, $q_4^*=9$.

Fall 3 : $c_{1t}=c_1$, $\forall t\in T$

Corollar[1] 1.4
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, zum letzten Mal zu Beginn des TZI t' zu erneuern, dann sind die ETZI t ($t'\leq t\leq v$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($v'<v$).

Beweis:
Der Beweis lässt sich ganz analog zu dem des Corollars 1.3 durchführen. Die Bedingungen $l_{t'v'}\leq l_{tv'}$ des Corollars 1.2 lassen sich zu $\sum_{t'}^{v'-1} h_j \leq \sum_{t}^{v'-1} h_j$ ($c_{1t}=c_1$) zurückführen.

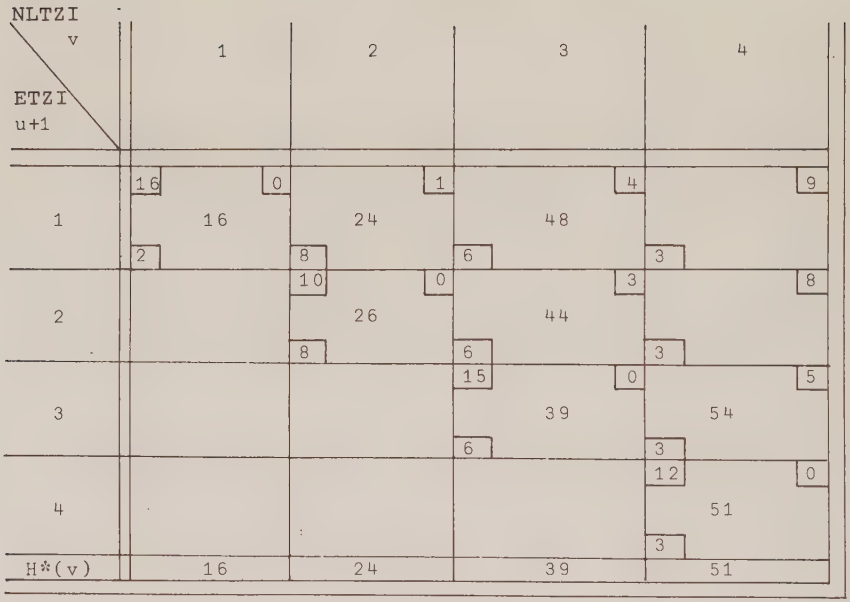
Da die erneuerungsproportionalen Kosten in diesem Fall nicht entscheidungsrelevant sind, werden sie bei der Berechnung der optimalen Lösung nicht berücksichtigt[2].

Beispiel 3.4

TZI / BKo	1	2	3	4
r_t	2	8	6	3
c_{kt}	16	10	15	12
h_t	1	3	5	4

[1]Vgl. W. POPP a.a.O., S. 68, H.M. WAGNER, T.M. WHITIN a.a.O., S. 94.

[2]Vgl. W. POPP a.a.O., S. 63.



Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=10$, $q_2^*=0$, $q_3^*=6$, $q_4^*=3$.

4. Erweiterung auf Verzug

Für die Lagergrösse vor Erneuerung x_t ($t\in\mathbb{T}$) führen wir hier die Indikatorvariable $\delta_1(x_t)$ bzw. $\delta_2(x_t)$ ein, so dass

$$\delta_1(x_t)=\begin{cases}1 \text{ für } x_t>0,\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$

bzw.

$$\delta_2(x_t)=\begin{cases}1 \text{ für } x_t<0\\ 0 \text{ sonst}\end{cases}$$

gilt.

Für den gesamten Planungszeitraum sind dann die Kosten

$$(4.1)\qquad \sum_1^T[c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t+h_tx_t\delta_1(x_t)-p_tx_t\delta_2(x_t)]$$

unter den Restriktionen

$$(4.2)\qquad x_{t-1}-x_t+q_t=r_t,\ \forall t\in\mathbb{T},$$

$$(4.3)\qquad 0\le q_t,\ \forall t\in\mathbb{T},$$

$$(4.4)\qquad x_0=x_T=0$$

zu minimieren.

Der einzige Unterschied zwischen diesem Modell und dem Grundmodell liegt darin, dass wir hier den Verzug

zugelassen haben. Dadurch wird die Nichtnegativitäts-bedingung für Lagergrösse nicht berücksichtigt. Als Entscheidungsvariablen treten hier q_t und x_t auf.

4.1 Lineare gemischt-ganzzahlige Programmierung

Da jede vorzeichenunbeschränkte Variable als Differenz zweier nichtnegativer Variablen dargestellt werden kann, betrachten wir die Transformation $x_t=x_t^+-x_t^-$ ($t\in\mathbb{T}$), wobei x_t^+ bzw. $-x_t^-$ die nichtnegative bzw. nichtpositive Lagergrösse ist.

Die Modellformulierung lautet dann:

$$\min \sum_1^T [c_{kt}y_t+c_{1t}q_t+h_tx_t^++p_tx_t^-] \tag{4.5}$$

$$x_{t-1}^+-x_{t-1}^-+x_t^--x_t^++q_t=r_t, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.6}$$

$$0\le y_tM-q_t, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.7}$$

$$0\le y_t\le 1, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.8}$$

$$0\le x_t^+, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.9}$$

$$0\le x_t^-, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.10}$$

$$y_t \text{ ganzzahlig}, \quad \forall t\in\mathbb{T}, \tag{4.11}$$

$$x_0^+=x_0^-=x_T^+=x_T^-=0, \tag{4.12}$$

$$(4.3).$$

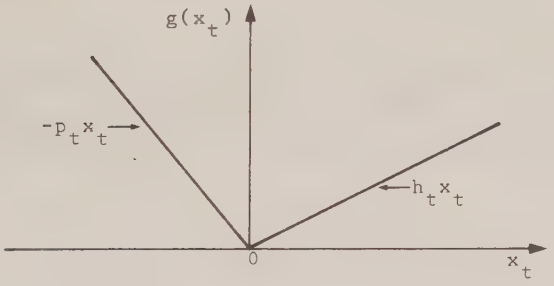
Mit Ausnahme der Nichtnegativitätsbedingungen für alle $4T$ Entscheidungsvariablen q_t, x_t^+, x_t^- und y_t haben wir hier $(4T+1)$ Restriktionen. Dadurch wird das Problem gegenüber dem Fall ohne Verzug wesentlich vergrössert.

4.2 Dynamische Programmierung

Wir betrachten die Funktion

$$g(x_t)=\begin{cases} h_t x_t \text{ für } x_t \geq 0, \\ -p_t x_t \text{ für } x_t \leq 0. \end{cases}$$

Vgl. die folgende Abbildung.



Obwohl $h_t x_t$ bzw. $-p_t x_t$ für $x_t \geq 0$ bzw. für $x_t \geq 0$ konkav ist, ist die Funktion $g(x_t)$ aber nicht konkav für alle x_t, so dass die Zielfunktion (4.1) über den konvexen Bereich {Q| (4.2)-(4.4)} nicht konkav zu sein braucht[1]. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, betrachten wir die in 4.1 durchgeführte Transformation von Variablen.

---

[1]Eine Betrachtung solcher Zielfunktion wurde von A.F. Jr. VEINOTT, A.S. MANNE [21] und W.I. ZANGWILL [25] angestellt.

Die Zielfunktion (4.1) lautet dann:

$$\min \sum_1^T [c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t+h_t x_t^+ + p_t x_t^-].$$

Als Restriktionen gelten (4.3), (4.6), (4.9), (4.10) und (4.12).
Durch diese Transformation haben wir jetzt eine konkave Zielfunktion über den nach unten beschränkten abgeschlossenen konvexen Bereich
$\mathbb{Q}=\{Q' \mid$ (4.3), (4.6), (4.9), (4.10), (4.12)$\}$, wobei
$Q=(q_1 \ldots q_T\ x_1^+ \ldots x_T^+\ x_1^- \ldots x_T^-)$ ist.

Analog zu 3.2 erhalten wir für die optimale Lösung maximal T+1 nichtnegative Werte. Dazu tritt entweder x_t^+ oder x_t^- für alle t in jeder Basislösung auf[1]. Es folgt dann:

$$x_{t-1}^+ = \sum_1^{t-1}(q_i - r_i) \text{ oder } -x_{t-1}^- = \sum_1^{t-1}(q_i - r_i).$$

1. Im Fall $x_{t-1}^- = x_{t-1}^+ = 0$, $x_t^+ \geq 0$ und $r_t > 0$ erhalten wir $\sum_1^{t-1} q_i = \sum_1^{t-1} r_i$ und $q_t \geq r_t$. Daraus folgt, dass q_t positiv ist. Falls $x_t^- > 0$ ist, dann ist $q_t \geq 0$.

2. Im Fall $x_{t-1}^- > 0$, $x_t^+ \geq 0$ und $r_t > 0$ erhalten wir $q_t + \sum_1^{t-1} q_i - \sum_1^{t-1} r_i \geq r_t$. Aus $\sum_1^{t-1} q_i < \sum_1^{t-1} r_i$ folgt $q_t > 0$. Falls $x_t^- > 0$ ist, dann ist $q_t \geq 0$.

Umgekehrt haben wir:

---

[1] Vgl. G. HADLEY [8], S. 169.

1. Im Fall $q_t=0$, $x_t^+\geq 0$ und $r_t>0$ erhalten wir

$$\sum_1^{t-1} q_i - \sum_1^{t-1} r_i \geq r_t.$$

Daraus folgt, dass $x_{t-1}^+>0$ ist.

2. Im Fall $q_t=0$, $x_t^-\geq 0$ und $r_t>0$ erhalten wir $\sum_1^{t-1} q_i - \sum_1^{t-1} r_i \leq r_t$.

Daraus folgt, dass entweder $x_{t-1}^+\geq 0$ oder $x_{t-1}^-\geq 0$ ist.

Theorem 2

Der Vektor Q ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, wenn sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v (u<v) höchstens ein ETZI befindet.

Beweis:

Der Beweis lässt sich ganz analog zu dem des Theorems 1 durchführen. Wir geben hier nur die Unterschiede zu dem Beweis des Theorems 1 an.

Es seien:

$$Q=[V=(q_1\ldots q_T), X^+=(x_1^+\ldots x_T^+), X^-=(x_1^-\ldots x_T^-)],$$

$$Q^1=[V^1=(q_1^1\ldots q_T^1), X^{+1}=(x_1^{+1}\ldots x_T^{+1}), X^{-1}=(x_1^{-1}\ldots x_T^{-1})],$$

$$Q^2=[V^2=(q_1^2\ldots q_T^2), X^{+2}=(x_1^{+2}\ldots x_T^{+2}), X^{-2}=(x_1^{-2}\ldots x_T^{-2})].$$

Aus (E) in dem Beweis des Theorems 1 folgt:

$$x_t^{+1}=x_t^{-1}=x_t^{+2}=x_t^{-2}=x_t^+=x_t^-,\quad t<t^1,\ t\geq t^2,$$

$$x_t^{+1}-x_t^{-1}=x_t^+-x_t^-+\eta,\quad t^1\leq t<t^2,$$

$$x_t^{+2}-x_t^{-2}=x_t^+-x_t^--\eta,\quad t^1\leq t<t^2.$$

Aus (A) im Beweis des Theorems 1 folgt:

$$x_t^+ = \lambda x_t^{+1} + (1-\lambda) x_t^{+2}, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

$$x_t^- = \lambda x_t^{-1} + (1-\lambda) x_t^{-2}, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Sei t^3 $(t^1 \leq t^3 < t^2)$ der grösste Wert, so dass $q_t 1 - \sum_t^{t^3} 1 r_i \geq 0$ gilt.

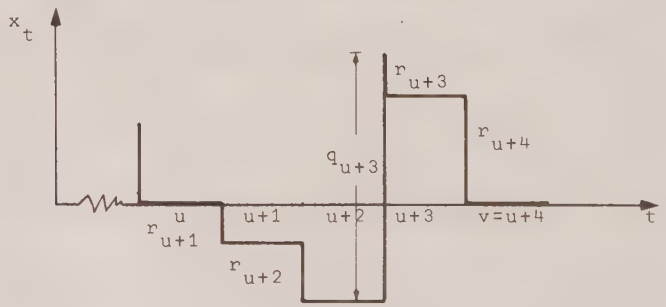
Für $\lambda = 1/2$ und $\eta > 0$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
x_t^{+1} &= x_t^+ + \eta, \quad t^1 \leq t \leq t^3, \\
x_t^{-1} &= x_t^- - \eta, \quad t^3 < t < t^2, \\
x_t^{+2} &= x_t^+ - \eta, \quad t^1 \leq t \leq t^3, \\
x_t^{-2} &= x_t^- + \eta, \quad t^3 < t < t^2.
\end{aligned} \tag{H}$$

Aus ganz analogen Ueberlegungen wie im Beweis des Theorems 1 erhalten wir :

$$\eta = \min \left[q_t 1, q_t 2, \min_{t^1 \leq t < t^2} \{ x_t^+, x_t^- \} \right], \quad \eta > 0.$$

Vgl. die folgende Abbildung.



Aus dem Vorhergehenden erhalten wir :

1. Bei einer optimalen Entscheidungsregel erneuern wir erst dann, wenn die Lagergrösse nichtpositiv ist.
2. Zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v ist die Erneuerungsmenge q_t $(u<t\leq v)$ bei einer optimalen Entscheidungsregel gleich $\sum_{u+1}^{v} r_i$.

Rekursionsformel

Sei $H(u,t,v)$ die Kosten für die TZI $(u+1)$ bis v unter der Bedingung, dass das ETZI gleich t ist, und dass die minimalen Kosten für die TZI 1 bis u gleich $H^*(u)$ sind, d.h.

$$(G)\quad H(u,t,v)=c_{kt}+c_{1t}\left(\sum_{u+1}^{v} r_i\right)+\sum_{u+1}^{t-1}\left(p_j \sum_{u+1}^{j} r_i\right)+\sum_{t}^{v-1}\left(h_j \sum_{j+1}^{v} r_i\right).$$

Die Rekursionsformel (III) kann folgendermassen umgeschrieben werden:

$$H^*(v)=\min_{0\leq u<v}\ \min_{u+1\leq t\leq v}\ [H^*(u)+H(u,t,v)],\ \forall v\in T, \qquad (IV)$$

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H^*(0)=0$.

Bei der Berechnung der optimalen Lösung sind folgende Beziehungen zu beachten:

1. Aus (G) folgt:

$$H(u,t,v+1)=c_{kt}+c_{1t}\left(\sum_{u+1}^{v+1} r_i\right)+\sum_{u+1}^{t-1}\left(p_j \sum_{u+1}^{j} r_i\right)+\sum_{t}^{v}\left(h_j \sum_{j+1}^{v+1} r_i\right).$$

---

[1] Vgl. A.F. Jr. VEINOTT, A.S. MANNE [21], W.I. ZANGWILL [25].

Wir erhalten dann:

$$H(u,t,v+1)-H(u,t,v)=(c_{1t}+\sum_{t}^{v}h_j)r_{v+1}.$$

Analog gelten:

$$H(u,v,v)-H(u+1,v,v)=(c_{1v}+\sum_{u+1}^{v-1}p_j)r_{u+1},$$

$$H(v-1,v,v)=c_{kv}+c_{1v}r_v.$$

Für $l_{t,v+1}=c_{1t}+\sum_{t}^{v}h_j$ und $f_{u+1,t}=c_{1t}+\sum_{u+1}^{t-1}p_j$ $(0\le u<t\le v\le T)$ haben wir $l_{t,v+1}=l_{tv}+h_v$ und $f_{ut}=f_{u+1,t}+p_u$ $(0\le u<t\le v\le T)$. Wegen $c_{11}=l_{11}=f_{11}$ sind die übrigen $l_{t,v+1}$ und $f_{u+1,t}$ einfach durch die obigen Relationen bestimmt.

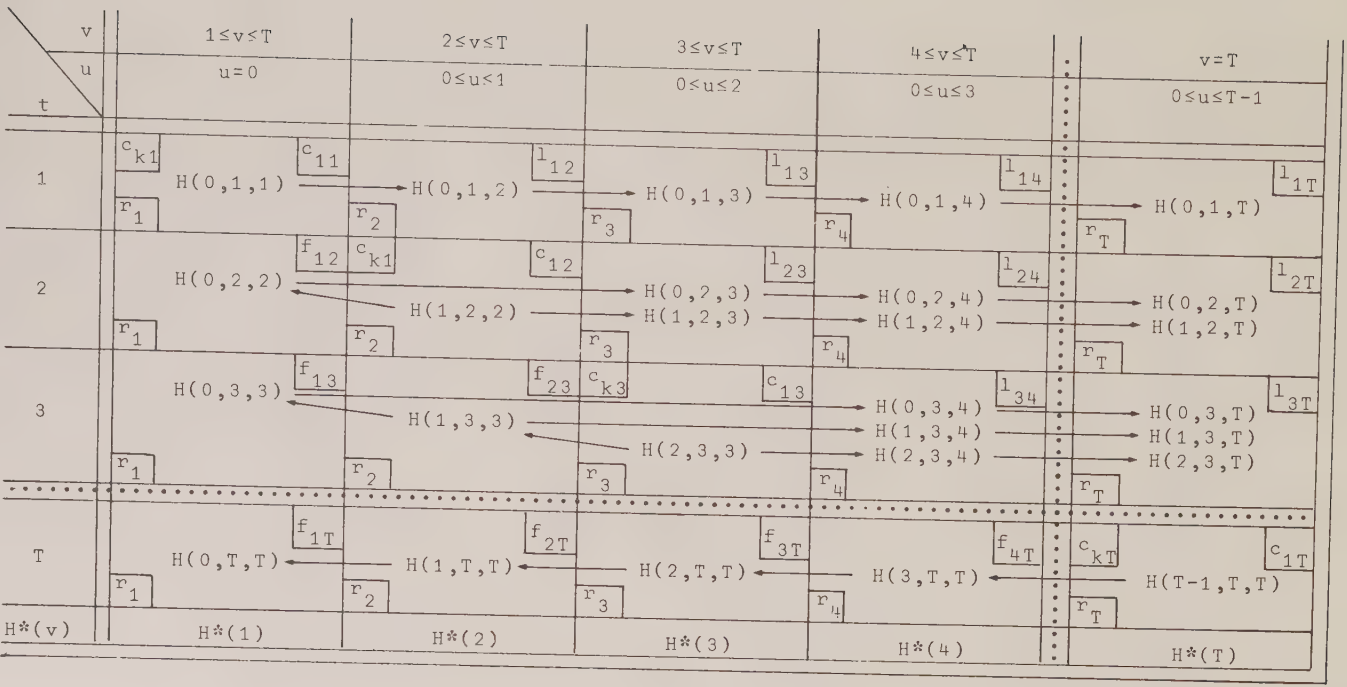
Wir berechnen die optimale Lösung mit Hilfe des folgenden Tableaus, das sowohl die vorgegebenen r_t, c_{kt}, c_{1t} als auch die zu berechnenden l_{tv}, f_{ut}, $H^*(v)$ und $H(u,t,v)$ enthält. Dabei gehen wir von der Hauptdiagonalen des Tableaus aus:

1. Für das Feld (t,t) gilt: $c_{kt}+c_{1t}r_t$.

2. Für die Berechnung von $H^*(v)$ betrachten wir nur die Werte der Felder (t,v), (v,t) und $(T+1,t)$ für $t\le v$.

3. Jeden Wert eines Feldes (t,v) erhalten wir, indem wir $l_{tv}r_v$ für $t\le v$ bzw. $f_{vt}r_v$ für $t>v$ zu dem vorher berechneten Wert addieren. Zum Beispiel für das Feld $(3,2)$ erhalten wir den Wert $[f_{23}r_2+H(2,3,3)]$.

4. Die Berechnung von einem $H(u,t,v)$ setzt die von einem anderen voraus. Zum Beispiel müssen wir $H(1,2,2)$ zuerst berechnen, bevor wir $H(0,2,2)$ erhalten. Diese Präzedenzbedingung ist durch die Pfeile in dem folgenden Arbeitstableau angegeben.


v
u
t
1≤v≤T
u=0
2≤v≤T
0≤u≤1
3≤v≤T
0≤u≤2
4≤v≤T
0≤u≤3
v=T
0≤u≤T-1
1
2
3
T
H*(v)
H*(1)
H*(2)
H*(3)
H*(4)
H*(T)
H(0,1,1)
H(0,1,2)
H(0,1,3)
H(0,1,4)
H(0,1,T)
H(0,2,2)
H(1,2,2)
H(0,2,3)
H(1,2,3)
H(0,2,4)
H(1,2,4)
H(0,2,T)
H(1,2,T)
H(0,3,3)
H(1,3,3)
H(2,3,3)
H(0,3,4)
H(1,3,4)
H(2,3,4)
H(0,3,T)
H(1,3,T)
H(2,3,T)
H(0,T,T)
H(1,T,T)
H(2,T,T)
H(3,T,T)
H(T-1,T,T)
c k1
c 11
l 12
l 13
l 14
l 1T
r 1
r 2
r 3
r 4
r T
f 12
c k1
c 12
l 23
l 24
l 2T
f 13
f 23
c k3
c 13
l 34
l 3T
f 1T
f 2T
f 3T
f 4T
c kT
c 1T

Beispiel 4.1

TZI / BKo	1	2	3	4
r_t	20	35	25	45
c_{kt}	30	40	60	50
c_{1t}	10	15	12	14
h_t	1	2	4	3
p_t	5	6	8	7

t \ v / u	$1 \le v \le 4$ 0	$2 \le v \le 4$ $0 \le u \le 1$	$3 \le v \le 4$ $0 \le u \le 2$	$v = 4$ $0 \le u \le 3$
1	[30] [10] 230 [20]	[11] 615 [35]	[13] 940 [25]	[17] 1705 [45]
2	[20] 965 [20]	[40] [15] 565 [35]	[17] 1390 990 [25]	[21] 2335 1935 [45]
3	[23] 1450 [20]	[18] 990 [35]	[60] [12] 360 [25]	[16] 2170 1710 1080 [45]
4	[33] 2870 [20] [35]	[28] 2210 [25]	[22] 1230	[50] [14] 680 [45]
H*(v)	230	615	940	1620

Wir betrachten zum Beispiel das Feld (2,3).

Wir haben: $u=0$, 1, $v=3$, $t=2$, $l_{23}=17$, $r_3=25$.

Für dieses Feld müssen wir $H(0,2,3)$ und $H(1,2,3)$ berechnen.

Dazu brauchen wir die Werte der Felder (2,1) und (2,2),

d.h. $H(0,2,2)$ und $H(1,2,2)$.

Es gilt dann:

$$H(0,2,3)=H(0,2,2)+l_{23}r_3=965+17.25=1390,$$

$$H(1,2,3)=H(1,2,2)+l_{23}r_3=565+17.25=990.$$

Wir verfahren ganz analog wie oben für alle Felder des Tableaus.

Die optimale Lösung ist dann:

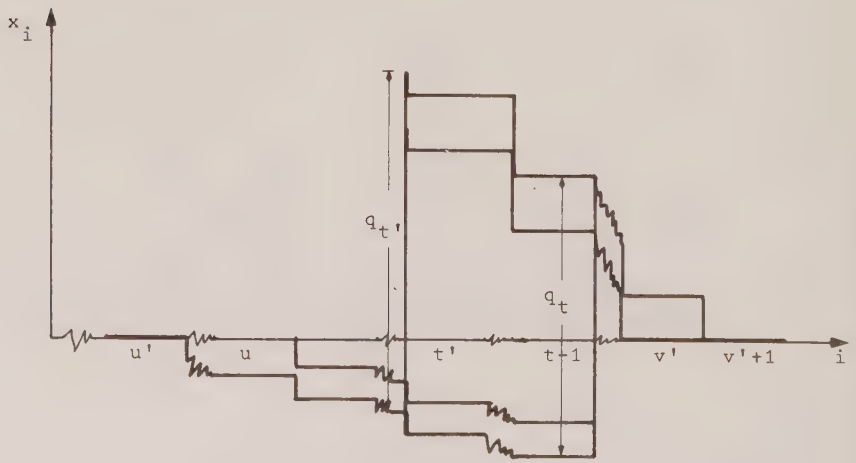
$q_1^*=80$, $q_2^*=0$, $q_3^*=0$, $q_4^*=45$.

Analog zu 3.2 werden wir anhand der Rekursionsformel (IV) folgende Fälle untersuchen.

Fall 1 : c_{1t} beliebig im Zeitverlauf

Corollar 2.1
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0 \leq u' < t' \leq v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, dann sind u', die NLTZI u und die ETZI t, die die Bedingungen $f_{u't} < f_{u't'}$ ($u < u'$, $0 \leq u' < t \leq v'+1$) bzw. $f_{ut'} < f_{ut}$ ($u' < u$, $0 \leq u < t \leq v'+1$) erfüllen, entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v'+1.

Beweis:
Wir werden zeigen, dass die relevanten NLTZI u Bedingungen, die wir später angeben, erfüllen müssen. Um diese NLTZI lokalisieren zu können, vergleichen wir die Kosten [H*(u)+H(u,t,v'+1)] mit den Kosten [H*(u')+H(u',t,v'+1)]. Vgl. die folgende Abbildung.



1. Für $u'<u$ und $t\neq t'$ gilt:

$$H(u,t,v'+1)=H(u',t,v'+1)-\sum_{u'+1}^{u-1}(p_j\sum_{u'+1}^{j}r_i)-f_{ut}(\sum_{u'+1}^{u}r_i).$$

$$H(u,t',v')=H(u',t',v')-\sum_{u'+1}^{u-1}(p_j\sum_{u'+1}^{j}r_i)-f_{ut'}(\sum_{u'+1}^{u}r_i).$$

Es folgt dann:

$$H^*(u)+H(u,t,v'+1)-H^*(u)-H(u,t',v')=H^*(u')+H(u',t,v'+1)-$$

$$-H^*(u')-H(u',t',v')+(f_{ut'}-f_{ut})\sum_{u'+1}^{u}r_i.$$

Aus der Annahme gilt $H^*(u)+H(u,t',v')\geq H^*(u')+H(u',t',v')$.
Ist $H^*(u)+H(u,t,v'+1)\leq H^*(u')+H(u',t,v'+1)$, dann muss
$f_{ut'}<f_{ut}$ gelten. Für $t=t'$ gilt:
$H^*(u)+H(u,t',v'+1)\geq H^*(u')+H(u',t',v'+1)$.

2. Für $u'>u$ und $t\neq t'$ gilt:

$$H(u,t,v'+1)=H(u',t,v'+1)+\sum_{u+1}^{u'-1}(p_j\sum_{u+1}^{j}r_i)+f_{u't}(\sum_{u+1}^{u'}r_i).$$

$$H(u,t',v')=H(u',t',v')+\sum_{u+1}^{u'-1}(p_j\sum_{u+1}^{j}r_i)+f_{u't'}(\sum_{u+1}^{u'}r_i).$$

Es folgt dann:

$$H^*(u)+H(u,t,v'+1)-H^*(u)-H(u,t',v')=H^*(u')+H(u',t,v'+1)-$$

$$-H^*(u')-H(u',t',v')+(f_{u't}-f_{u't'})\sum_{u+1}^{u'}r_i.$$

Aus der Annahme gilt $H^*(u)+H(u,t',v')\geq H^*(u')+H(u',t',v')$.
Ist $H^*(u)+H(u,t,v'+1)\leq H^*(u')+H(u',t,v'+1)$, dann muss
$f_{u't}<f_{u't'}$ gelten. Für $t=t'$ gilt:
$H^*(u)+H(u,t',v'+1)\geq H^*(u')+H(u',t',v'+1)$.

Corollar 2.2

Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0 \le u' < t' \le v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, dann sind t', die ETZI t und die NLTZI u, die die Bedingungen $l_{t,v'+1} < l_{t',v'+1}$ ($0 \le u < t \le v'+1$) erfüllen, entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v'+1.

Beweis:

Analog zu Corollar 2.1 versuchen wir hier, die relevanten ETZI t zu lokalisieren. Dafür vergleichen wir die Kosten $[H^*(u)+H(u,t,v'+1)]$ mit den Kosten $[H^*(u)+H(u,t',v'+1)]$. Zur Veranschaulichung des Beweises benützen wir die Abbildung des Corollars 2.1.

1. Für $u' < u$, $t \le v'$ und $t \ne t'$ gilt:

$$H(u,t,v'+1) = H(u,t,v') + l_{t,v'+1} r_{v'+1},$$

$$H(u,t',v'+1) = H(u,t',v') + l_{t',v'+1} r_{v'+1}.$$

Aus der Annahme $H^*(u)+H(u,t',v') \ge H^*(u')+H(u',t',v')$ folgt:

$$H^*(u)+H(u,t',v'+1) \ge H^*(u')+H(u',t',v')+l_{t',v'+1} r_{v'+1},$$

$$H^*(u)+H(u,t,v'+1)-H^*(u)-H(u,t',v'+1) \le H^*(u)+H(u,t,v')-$$

$$-H^*(u')-H(u',t',v')+(l_{t,v'+1}-l_{t',v'+1}) r_{v'+1}.$$

Ist $H^*(u)+H(u,t,v'+1) \ge H^*(u)+H(u,t',v'+1)$, dann muss $l_{t,v'+1} < l_{t',v'+1}$ gelten.

Dieselben Schlussfolgerungen erhalten wir wie im Fall $u' \ge u$, $t \le v'$ und $t \ne t'$.

2. Für $u'<u$, $t>v'$ und $t\neq t'$ gilt:

$$H^*(u)+H(u,v'+1,v'+1)\geq H^*(u)+H(u,t',v')+c_{k,v'+1}+c_{1,v'+1}r_{v'+1}.$$

Da $H(u,t',v'+1)$ gleich $[H(u,t',v')+l_{t',v'+1}r_{v'+1}]$ ist,

gilt dann:

$$H^*(u)+H(u,v'+1,v'+1)-H^*(u)-H(u,t',v'+1)\geq c_{k,v'+1}+$$

$$+(c_{1,v'+1}-l_{t',v'+1})r_{v'+1}.$$

Ist $H^*(u)+H(u,v'+1,v'+1)\leq H^*(u)+H(u,t',v'+1)$, dann muss

$c_{1,v'+1}<l_{t',v'+1}$ oder $l_{t,v'+1}<l_{t',v'+1}$ gelten.

Dieselben Schlussfolgerungen erhalten wir wie im Fall

$u'\geq u$, $t>v'$ und $t\neq t'$.

Corollar 2.3
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0\leq u'<t'\leq v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, wobei für t' die Bedingungen $l_{t'v'}\leq l_{tv'}$ ($0\leq u<t\leq v'$) gelten, dann sind u' und die ETZI t ($t'\leq t\leq v$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($v'<v$).

Beweis:
Aus Corollar 2.2 folgt $H^*(u)+H(u,t,v'+1)\geq H^*(u)+H(u,t',v'+1)$, wenn $l_{t',v'+1}\leq l_{t,v'+1}$ gilt.
Aus $l_{t'v}\leq l_{tv'}$ folgt $l_{t'v}+h_{v'}\leq l_{tv'}+h_{v'}$ oder $l_{t',v'+1}\leq l_{t,v'+1}$ für $1\leq t\leq v'$.
Nehmen wir an, dass $l_{t'v}\leq l_{tv}$ für $1\leq t\leq v'$ gilt.
Aus $l_{t'v}\leq l_{tv}$ folgt $l_{t'v}+h_v\leq l_{tv}+h_v$ oder $l_{t',v+1}\leq l_{t,v+1}$.
Damit haben wir das Corollar für alle v ($v'<v\leq T$) bewiesen.

Beispiel 4.2

Unter Berücksichtigung des Theorems 2 und der Corollars 2.1, 2.2 und 2.3 erhalten wir für das Beispiel 4.1 das folgende Tableau.

v / u / t	$1 \le v \le 4$	$2 \le v \le 4$	$3 \le v < 4$	$v = 4$
	0	$0 \le u \le 1$	$0 < u \le 2$	$0 \le u \le 3$
1	30 | 10 | 230 | 20	11 | 615 | 35	13 | 940 | 25	17 | 1705 | 45
2	20 | 965 | 20	40 | 15 | 35	17 | 25	21 | 45
3	23 | 1450 | 20	18 | 990 | 35	60 | 12 | 360 | 25	16 | 2170 | 1710 | 1080 | 45
4	33 | 2870 | 20	28 | 2210 | 35	22 | 1230 | 25	50 | 14 | 680 | 45
$H^*(v)$	230	615	940	1620

Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=80$, $q_2^*=0$, $q_3^*=0$, $q_4^*=45$.

Fall 2 : $c_{1t} \leq c_{1,t+1}$, $\forall t \in \mathbb{T}-\{T\}$

Corollar 2.4
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0 \leq u' < t' \leq v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, dann sind u', die NLTZI u und die ETZI t ($u > u'$, $t > t'$ bzw. $u < u'$, $t < t'$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v'+1.

Beweis:
Der Beweis folgt direkt aus dem des Corollars 2.1.

Fall 3 : $c_{1t} \geq c_{1,t+1}$, $\forall t \in \mathbb{T}-\{T\}$

Corollar 2.5
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0 \leq u' < t' \leq v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, dann sind die NLTZI u ($u' \leq u$) und die ETZI t ($t' \leq t \leq v \leq T$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($v' < v$).

Beweis:
Der Beweis folgt direkt aus dem des Corollars 2.3.

Fall[1] 4 : $c_{1t} = c_1$, $\forall t \in \mathbb{T}$

Corollar 2.6
Wenn es für die TZI 1 bis v' optimal ist, dass u' und t' ($0 \leq u' < t' \leq v'$) als letzte NLTZI und ETZI auftreten, dann sind die NLTZI u ($u' \leq u$) und die ETZI t ($t' \leq t \leq v \leq T$) entscheidungsrelevant für die TZI 1 bis v ($v' < v$).

Beweis:
Der Beweis folgt direkt aus dem des Corollars 2.3.

---

[1] Die erneuerungsproportionalen Kosten sind nicht entscheidungsrelevant.

Beispiel 4.3

TZI / BKo	1	2	3	4
r_t	10	20	15	25
c_{kt}	30	40	35	50
h_t	1	2	4	3
p_t	5	7	6	8

t \ v	$1 \le v < 4$	$2 \le v < 4$	$3 \le v < 4$	$v = 4$
	0	$0 \le u \le 1$	$0 \le u \le 2$	$0 \le u < 3$
1	[30] [0] 30 [10]	[1] 50 [20]	[3] 95 [15]	[7] [25]
2	[5] 90 [10]	[40] [0] 40 [20]	[2] 120 70 [15]	[6] [25]
3	[12] 295 [10]	[7] 175 [20]	[35] [0] 35 [15]	[4] 135 [25]
4	[18] [10]	[13] [20]	[6] 140 [15]	[50] [0] 50 [25]
$H^*(v)$	30	50	85	135

Die optimale Lösung ist:

$q_1^* = 30$, $q_2^* = 0$, $q_3^* = 15$, $q_4^* = 25$.

5. Erweiterung auf Kapazitätsbeschränkungen

Für den gesamten Planungszeitraum sind die Kosten

(5.1) $$\sum_1^T [c_{kt}\delta(q_t)+c_{1t}q_t+h_t x_t \delta_1(x_t)-p_t x_t \delta_2(x_t)]$$

unter den Restriktionen

(5.2) $$x_{t-1}-x_t+q_t=r_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

(5.3) $$q_t \leq E_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

(5.4) $$x_t \leq L_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

(5.5) $$0\leq q_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

(5.6) $$x_0=x_T=0$$

zu minimieren.

Da der Verzug hier zugelassen wird, berücksichtigen wir nicht die Nichtnegativitätsbedingung für die Lagergrösse. Die Restriktionen bezüglich Lager- und Erneuerungskapazität sind durch (5.3) und (5.4) angegeben.

5.1 Lineare gemischt-ganzzahlige Programmierung

Die Modellformulierung lautet dann:

(5.7) $$\min \sum_1^T [c_{kt}y_t+c_{1t}q_t+h_t x_t^+ + p_t x_t^-]$$

(5.8) $$x_{t-1}^+ - x_{t-1}^- + x_t^- - x_t^+ + q_t = r_t, \quad \forall t\in\mathbb{T},$$

(5.9) $0 \leq y_t E_t - q_t, \quad \forall t \in \mathbb{T},$

(5.10) $0 \leq y_t \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{T},$

(5.11) $x_t^+ \leq L_t, \quad \forall t \in \mathbb{T},$

(5.12) $0 \leq x_t^+, \quad \forall t \in \mathbb{T},$

(5.13) $0 \leq x_t^-, \quad \forall t \in \mathbb{T},$

(5.14) y_t ganzzahlig, $\forall t \in \mathbb{T},$

(5.15) $x_0^+ = x_0^- = x_T^+ = x_T^- = 0,$

(5.5).

Da jede Variable q_t einer oberen Schranke E_t unterliegt, gewährleisten die Restriktionen (5.9), dass q_t gleich Null sein muss, wenn y_t gleich Null ist, und dass q_t kleiner oder gleich E_t, wenn y_t gleich eins ist. Dadurch führen wir hier - im Gegensatz zu 3 und 4 - keine Zahl M ein.

5.2 Dynamische Programmierung

Definitionen

1. Ein Lagerteilzeitintervall (LTZI) u $(u \in \mathbb{T} \cup \{0\})$ ist ein TZI mit einem leeren oder vollen Lager.
2. Ein Teilerneuerungsteilzeitintervall (TETZI) t $(t \in \mathbb{T})$ ist ein TZI mit einer Erneuerungsmenge q_t, wobei $0 < q_t < E_t$ gilt.

Es seien der Vektor $Q = (q_1 \ldots q_T \; x_1^+ \ldots x_T^+ \; x_1^- \ldots x_T^-)$ und die nach unten beschränkte abgeschlossene konvexe Menge $\mathbb{Q} = \{Q' \mid$ (5.3), (5.5), (5.8), (5.11), (5.12), (5.13), (5.15)$\}$.

Aus der linearen Programmierung wissen wir, dass die Basisvariablen im Fall der beschränkten Variablen zwischen 0 und den oberen Schranken liegen. Dieser Gedanke führt uns zu dem folgenden Theorem.

Theorem 3

Der Vektor Q ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, wenn sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden LTZI u und v ($u<v$) höchstens ein TETZI befindet.

Beweis:

Zunächst wird der Beweis für zwei beliebige, unmittelbar aufeinanderfolgende LTZI durch Widerspruch durchgeführt.

1. Sei Q ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, so dass sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden LTZI u und v ($u<v$) zwei TETZI t^1 und t^2 ($u<t^1$, $t^2 \leq v$) befinden, wobei $q_t=0$ für $t \neq t^1$, t^2; $u<t \leq v$ gilt.
   Wir werden zeigen, dass Q kein Eckpunkt ist, d.h. zwei Punkte $Q^1=(q_1^1 \ldots q_T^1 \; x_1^{+1} \ldots x_T^{+1} \; x_1^{-1} \ldots x_T^{-1})$ und $Q^2=(q_1^2 \ldots q_T^2 \; x_1^{+2} \ldots x_T^{+2} \; x_1^{-2} \ldots x_T^{-2})$ aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass $Q=\lambda Q^1+(1-\lambda)Q^2$ $(0<\lambda<1)$ gilt.
   Ganz analog zu dem Beweis des Theorems 2 erhalten wir für die Lagergrösse und die Erneuerungsmenge die Beziehungen (H) und (B).
   Aus den folgenden Relationen

$$V=\lambda V^1+(1-\lambda)V^2,$$

$$X^+=\lambda X^{+1}+(1-\lambda)X^{+2},$$

$$X^-=\lambda X^{-1}+(1-\lambda)X^{-2}$$

   folgt $Q=(Q^1+Q^2)/2$ für $\lambda=1/2$ und $\eta>0$.
   Es bleiben noch die Nichtnegativitäts- und Schrankenbedingungen für Lagergrössen und Erneuerungsmengen zu

prüfen, d.h.

$$q_t^1 \geq 0,\ q_t^2 \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{T}-\{t^1, t^2\},$$

$$0 \leq q_t^1 \pm \eta \leq E_t^1,\ 0 \leq q_t^2 \pm \eta \leq E_t^2,$$

$$0 \leq x_t^+ + \eta \leq L_t,\ 0 \leq x_t^+ - \eta < L_t,\ t^1 \leq t \leq t^3,$$

$$0 \leq x_t^- - \eta,\ 0 \leq x_t^- + \eta,\ t^3 < t < t^2,$$

wobei t^3 wie im Beweis des Theorems 2 definiert wurde. Die Begründung für die Ungleichheitszeichen (<) lautet folgendermassen:

1. Aus $\lambda>0$, $(1-\lambda)>0$, (5.12)-(5.13) und $x_t=\lambda x_t^1+(1-\lambda)x_t^2$ folgt $x_t^{+1}=x_t^{-1}=x_t^{+2}=x_t^{-2}$, wenn $x_t^+=x_t^-=0$ ist.
2. Analog gelten $x_t^{+1}<L_t$ und $x_t^{+2}\leq L_t$ bzw. $x_t^{+1}\leq L_t$ und $x_t^{+2}<L_t$, wenn $x_t^+<L_t$ ist.
3. Für die Erneuerungsmenge q_t erhalten wir dieselben Ergebnisse wie bei der Lagergrösse, d.h. $q_t^1<E_t$ und $q_t^2\leq E_t$ bzw. $q_t^1\leq E_t$ und $q_t^2<E_t$ gelten, wenn $q_t<E_t$ ist. Aus den Annahmen folgen aber $q_t^1<E_t$ und $q_t^2<E_t$ für $t=t^1, t^2$, so dass wir die Ungleichheitszeichen (<) für Lagergrösse und Erneuerungsmenge für die TZI t^1 bis t^2 erhalten.

Q^1 und Q^2 $(Q^1\neq Q^2)$ gehören zu $\mathbb{Q}$, wenn wir wählen:

$$\eta=\min\left[q_t^1,\ q_t^2,\ E_t^1-q_t^1,\ E_t^2-q_t^2,\ \min_{t^1\leq t<t^2}\{x_t^+, x_t^-, |L_t-x_t^+|\}\right].$$

Da Q^1 und Q^2 $(Q^1\neq Q^2)$ aus $\mathbb{Q}$ und $Q=(Q^1+Q^2)/2$ sind, ist Q definitionsgemäss kein Eckpunkt.

2. Umgekehrt sei Q ein Vektor, so dass sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden LTZI u und v höchstens ein TETZI t^1 $(u<t^1\leq v)$ befindet.
Wir werden zeigen, dass ein solcher Vektor einen Eckpunkt darstellt, d.h. keine anderen zulässigen Vektoren Q^3 und

Q^4 ($Q^3 \neq Q^4$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass

$$\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4=Q \quad (0<\lambda<1) \text{ gilt.}$$

Es sei angenommen, dass zwei zulässige Vektoren Q^3 und Q^4 ($Q^3 \neq Q^4$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, und dass

$$\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4=Q \quad (0<\lambda<1) \text{ gilt.}$$

Es folgt:

$$X^+=\lambda X^{+3}+(1-\lambda)X^{+4},$$

$$X^-=\lambda X^{-3}+(1-\lambda)X^{-4},$$

$$V=\lambda V^3+(1-\lambda)V^4,$$

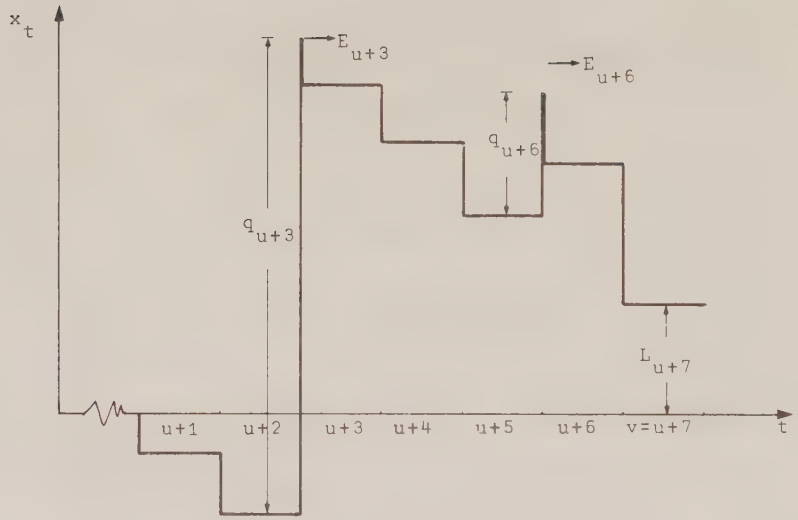
Da $\lambda>0$, $(1-\lambda)>0$ und $x_t^+=\lambda x_t^{+3}+(1-\lambda)x_t^{+4}$ bzw. $x_t^-=\lambda x_t^{-3}+(1-\lambda)x_t^{-4}$ sind, gelten $x_t^{+3}=x_t^{-3}=x_t^{+4}=x_t^{-4}=0$, wenn $x_t^-=x_t^+=0$ ist.
Analog gilt $x_t^{+3}=x_t^{+4}=L_t$, wenn $x_t^+=L_t$ ist.
Aus $\lambda>0$, $(1-\lambda)>0$ und $q_t=\lambda q_t^3+(1-\lambda)q_t^4$ folgt $q_t=q_t^3=q_t^4=0$ für $u+1<t\leq v$.
Aus (5.8) und der Annahme existiert aber ein einziges ($q_t 1=\sum_{u+1}^{v} r_t$), so dass u und v als LTZI auftreten.
Wir haben dann:

$$q_t 1=q_t^3=q_t^4 \quad (u<t\leq v).$$

Die obige Betrachtung gilt für alle Paare (u,v) und für alle Q^3 und Q^4 aus $\mathbb{Q}$ ($Q^3 \neq Q^4$).
Q muss dann ein Eckpunkt sein, da keine anderen zulässigen Vektoren Q^3 und Q^4 ($Q^3 \neq Q^4$) aus $\mathbb{Q}$ existieren, so dass

$$Q=\lambda Q^3+(1-\lambda)Q^4 \quad (0<\lambda<1) \text{ gilt.}$$

Der Beweis lässt sich ganz analog auf den Fall von mehr als zwei TETZI und dem aller Paare (u,v) erweitern, wobei $q_t=E_t$ für $t\neq t^1, t^2$, $u<t\leq v$ gilt. Vgl. die folgende Abbildung.



Rekursionsformel

Seien: $\{x_u^1, x_u^2\}=\{0, L_u\}$,

$\{x_v^1, x_v^2\}=\{0, L_v\}$.

Sei $H_{ij}(u+1,v)$ die minimalen Kosten für die TZI $(u+1)$ $(x_u^i, i=1, 2)$ bis v $(x_v^j, j=1, 2)$.

Die vorwärtsdynamische Rekursionsformel (III) wird folgendermassen umgeschrieben:

$$H_j^*(v)= \min_{\substack{0\le u<v \\ 1\le i\le 2}} [H_i^*(u)+H_{ij}(u+1,v)],\ 1\le j\le 2,\ \forall v\in\mathbb{T},\ (V)$$

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H_j^*(0)=0$, $j=1, 2$.

Die gesamte Erneuerungsmenge $q^{ij}_{u+1,v}$ ist für die TZI $(u+1)$ bis v durch $\sum_{u+1}^{v} r_t + x_v^j - x_u^i$ $(i=1, 2, j=1, 2)$ bestimmt. Bei der Berechnung der optimalen Lösung im Falle ohne Verzug ist zu beachten, dass $\sum_1^v E_t \geq \sum_1^v r_t$ für alle v gilt.

Beispiel 5.1

TZI / Bko	1	2	3	4
r_t	20	60	90	35
E_t	50	70	60	65
L_t	40	30	25	10
c_{kt}	22	31	45	15
c_{1t}	12	18	11	14
h_t	1	2	4	3
p_t	5	7	6	8

Die Ergebnisse der Berechnung sind in dem folgenden Tableau angegeben. Dabei werden nur die zulässigen Entscheidungspfade mit den entsprechenden Kosten eingetragen. Unter den Entscheidungspfaden mit dem gleichen Wert von $q^{ij}_{u+1,v}$ betrachten wir denjenigen mit den minimalen Kosten. Dadurch erhalten wir $H_{ij}(u+1,v)$ und $H_j^*(v)$.

u+1	v	i	j	$q^{ij}_{u+1,v}$	$(q_{u+1} \ldots q_v)$	Kosten	$H_{ij}(u+1,v)$	$H^*(u)+H_{ij}(u+1,v)$	$H^*_j(v)$
1	1	1	1	20	(20)	262	262	262	262
1	2	1	1	80	(10 70)	1483			
					(50 30)	1223	1223	1223	1223
		1	2	110	(40 70)	1873			
					(50 60)	1823	1823	1823	1823
2	2	1	1	60	(60)	1111	1111	1373	
3	3	2	1	60	(60)	705	705	2528	2528
2	4	1	1	185	(70 60 55)	2921	2921	3183	
					(70 50 65)	3011			
3	4	1	1	125	(60 65)	1810	1810	3033	3033
4	4	1	1	35	(35)	505	505	3033	3033

Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=50$, $q_2^*=30$, $q_3^*=60$, $q_4^*=65$ oder $q_1^*=50$, $q_2^*=60$, $q_3^*=60$, $q_4^*=35$.

Wir werden jetzt einige spezielle Fälle untersuchen.

Fall 1 : L_t beliebig im Zeitverlauf, keine Erneuerungsschranke

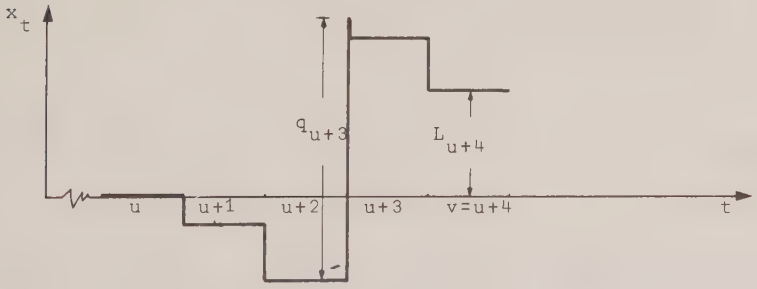
Es seien der Vektor $Q=(q_1 \ldots q_T \; x_1^+ \ldots x_T^+ \; x_1^- \ldots x_T^-)$ und die nach unten beschränkte abgeschlossene konvexe Menge $\mathbb{Q}=\{Q' \mid (5.5), (5.8), (5.11), (5.12), (5.13), (5.15)\}$.

Theorem 4

Der Vektor Q ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, wenn sich zwischen zwei beliebigen, unmittelbar aufeinanderfolgenden LTZI u und v $(u<v)$ höchstens ein ETZI befindet.

Beweis:

Der Beweis lässt sich analog zu dem des Theorems 3 durchführen. Vgl. die folgende Abbildung.



Wir wählen hier:

$$\eta=\min\left[q_{t^1}, q_{t^2}, \min_{t^1 \le t < t^2}\{x_t^+, x_t^-, |L_t - x_t^+|\}\right],$$

wobei η positiv ist.

Es ist folgendes zu beachten:

1. Sei z_t die Lagergrösse nach Erneuerung zu Beginn des TZI t und $z_t \leq S$, wobei S eine vorgegebene Schranke darstellt.
   Aus $x_t = x_{t-1} + q_t - r_t$ und $z_t = q_t + x_{t-1}$ folgt $z_t = x_t + r_t$.
   Aus $z_t \leq S$ folgt $x_t \leq S - r_t$ ($\forall t \in \mathbb{T}$).
   Setzen wir $S - r_t = L_t$ ($t \in \mathbb{T}$), dann erhalten wir den Fall .
2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass kein Verzug zugelassen ist.
   Sei M eine sehr grosse positive Zahl.

Aus $H_{ij}(u+1,v) = M$ ($i=1, 2$) ($j=1, 2$) folgt $H_{ij}(u+1,v+1) = M$.
$H_{ij}(u+1,v)$ ist gleich M, wenn z.B. $L_{u+1} < x_{u+1}$ gilt.
Aus $q^{ij}_{u+1,v} + L_u - r_{u+1} = L_v + \sum_{u+2}^{v} r_t$ folgt $x_{u+1} = L_v + \sum_{u+2}^{v} r_t$ oder

$$x_{u+1} = S + \sum_{u+2}^{v-1} r_t .$$

Aus $L_{u+1} < S + \sum_{u+2}^{v-1} r_t$ folgt $L_{u+1} < S + \sum_{u+2}^{v} r_t$.

Aus $x_{u+1} = S + \sum_{u+2}^{v} r_t = L_{v+1} + \sum_{u+2}^{v+1} r_t$ für $H_{ij}(u+1,v+1)$ folgt

$H_{ij}(u+1,v+1) = M$.

Beispiel 5.2

$S = 4$

TZI / Bko	1	2	3	4
r_t	2	3	1	2
c_{kt}	20	60	90	70
c_{1t}	10	40	30	50

u+1	v	i	j	$q^{ij}_{u+1,v}$	$H_{ij}(u+1,v)$	$H^*_i(u)+H_{ij}(u+1,v)$	$H^*_j(v)$
1	1	1	1	2	40	40	40
		1	2	4	60	60	60
2	2	1	1	3	180	220	
		1	2	4	220	260	
		2	1	1	100	160	160
		2	2	2	140	200	200
3	3	1	1	1	120	280	
		1	2	4	210	370	370
		2	1	0	0	200	200
		2	2	3	180	380	
3	4	1	1	3	180	340	340
		2	1	2	150	350	
4	4	1	1	2	170	370	

Die optimale Lösung ist:

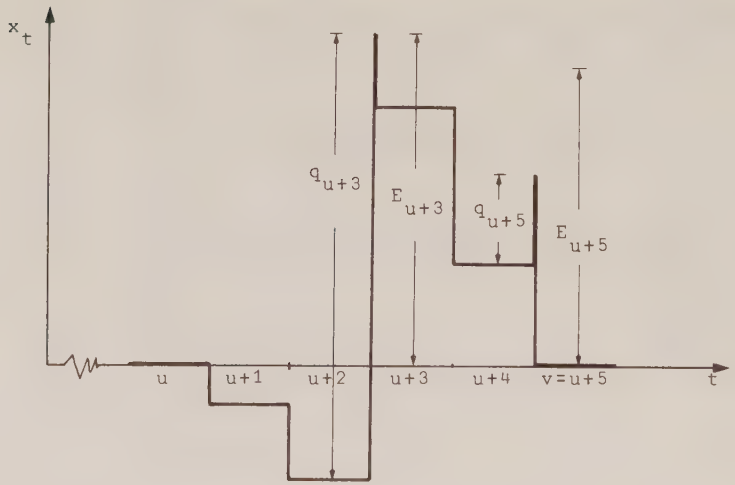
$q^*_1=4$, $q^*_2=1$, $q^*_3=3$, $q^*_4=0$.

Fall 2 : E_t beliebig im Zeitverlauf, keine Lagerschranke

Es seien der Vektor $Q=(q_1 \ldots q_T \; x^+_1 \ldots x^+_T \; x^-_1 \ldots x^-_T)$
und die nach unten beschränkte abgeschlossene konvexe Menge
$\mathbb{Q}=\{Q' \mid (5.3), (5.5), (5.8), (5.12), (5.13), (5.15)\}$.

Theorem 5
Der Vektor Q ist dann und nur dann ein Eckpunkt von $\mathbb{Q}$, wenn sich zwischen zwei beliebigen,unmittelbar aufeinanderfolgenden NLTZI u und v $(u<v)$ höchstens ein TETZI befindet.

Beweis:
Der Beweis lässt sich analog zu dem des Theorems 3 durchführen. Vgl. die folgende Abbildung.



Hier wählen wir:

$$\eta=\min\,[q_{t^1}, q_{t^2}, E_{t^1}-q_{t^1}, E_{t^2}-q_{t^2}, \min_{t^1\le t<t^2}\{x_t^+, x_t^-\}],\ \eta>0.$$

Rekursionsformel

Hier haben wir keine Lagerschranke, so dass die vorwärtsdynamische Rekursionsformel (V) folgendermassen lautet:

$$H^*(v) = \min_{0 \le u < v} [H^*(u) + H(u+1,v)], \quad \forall v \in \mathbb{T}, \qquad \text{(VI)},$$

wobei für die Anfangsbedingung gilt: $H^*(0)=0$.

Beispiel 5.3

Bko \ TZI	1	2	3	4
r_t	20	60	90	30
E_t	50	70	40	80
c_{kt}	10	18	16	14
c_{1t}	12	15	9	11
h_t	1	2	4	3
p_t	5	7	6	8

u+1	v	$q_{u+1,v}$	$(q_{u+1} \cdots q_v)$	Kosten	H(u+1,v)	H*(u)+ H(u+1,v)	H*(v)
1	1	20	(20)	250	250	250	250
1	2	80	(50 30)	1108	1108	1108	1108
			(10 70)	1248			
2	2	60	(60)	918	918	1168	
1	4	200	(50 70 40 40)	2678	2678	2678	2678
			(50 70 0 80)	2982			
2	4	180	(70 40 70)	2488	2488	2738	
			(70 30 80)	2568			
3	4	120	(40 80)	1570	1570	2678	2678

Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=50$, $q_2^*=70$, $q_3^*=40$, $q_4^*=40$ oder $q_1^*=50$, $q_2^*=30$, $q_3^*=40$, $q_4^*=80$.

Für den speziellen Fall $E_t=E$ ($\forall t\in T$) ist folgendes zu beachten:

1. Bei der Berechnung der Erneuerungsmenge $q_{u+1,v}=\sum_{u+1}^{v} r_i$ gilt die Beziehung $q_{u+1,v}=mE+E'$, wobei $E'<E$ und m die grösste ganze Zahl von $(\sum_{u+1}^{v} r_i)/E$ sind.
2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Verzug nicht zugelassen ist, und dass sich zwischen zwei beliebigen NLTZI u und v drei ETZI $(u+1)$ $(q_{u+1}=E)$, t' $(q_{t'}=E')$, t $(q_t=E)$ befinden.

Die folgenden Ergebnisse lassen sich ganz analog auf den Fall mehr als drei ETZI erweitern.

Es gilt:

$$\sum_{u+1}^{v} r_i=2E+E'.$$

Für eine mögliche Reihenfolge der Erneuerungen seien $(u+1)$, a', b die am spätesten auftretenden ETZI, die durch

$$(J)\qquad \{\max_a [\sum_{u+1}^{a} r_i], \max_b [\sum_{a+1}^{b} r_i]\}<\{E, E'\}$$

bestimmt sind.

Für die Berechnung von den einer möglichen Reihenfolge der Erneuerungen entsprechenden minimalen Kosten $H(u+1,t',t,v)$ sind die ETZI t', t bestimmt durch:

$$(K)\quad \begin{aligned} &\min_{u+2\le m\le a} [c_{km}+(c_{1m}+\sum_m^a h_j)E']=c_{kt'}+(c_{1t'}+\sum_{t'}^a h_j)E',\\ &\min_{t'+1\le m\le b} [c_{km}+(c_{1m}+\sum_m^b h_j)E]=c_{kt}+(c_{1t}+\sum_t^b h_j)E. \end{aligned}$$

Für jede Reihenfolge der Erneuerungen sind dann die am spätesten auftretenden ETZI und die ETZI für die Berechnung von $H(u+1,t',t,v)$ nach (J) und (K) zu bestimmen.

Für die Reihenfolge $(u'+1,t'',t,v)$ erhalten wir:

$$H(u'+1,t'',t,v)=c_{k,u'+1}+c_{1,u'+1}E'+c_{kt''}+c_{1t''}E+c_{kt}+$$

$$+c_{1t}E+\sum_{u+1}^{v-1}(h_j\sum_{j+1}^{v}r_i)-E\sum_{u+1}^{t''-1}h_j-E\sum_{u+1}^{t-1}h_j$$

Für die Reihenfolge (u+1,t',z,v) gilt:

$$H(u+1,t',z,v)=c_{k,u+1}+c_{1,u+1}E+c_{kt'}+c_{1t'}E'+c_{kz}+c_{1z}E+$$

$$+\sum_{u+1}^{v-1}(h_j\sum_{j+1}^{v}r_i)-E'\sum_{u+1}^{t'-1}h_j-E\sum_{u+1}^{z-1}h_j.$$

Für die Reihenfolge (u+1,v'',v',v) haben wir:

$$H(u+1,v'',v',v)=c_{k,u+1}+c_{1,u+1}E+c_{kv''}+c_{1v''}E+c_{kv'}+$$

$$+c_{1v'}E'+\sum_{u+1}^{v-1}(h_j\sum_{j+1}^{v}r_i)-E\sum_{u+1}^{v''-1}h_j-E'\sum_{u+1}^{v'-1}h_j.$$

Wir erhalten dann:

$$2.1\quad H(u+1,t',z,v)-H(u'+1,t'',t,v)=(c_{1,u+1})(E-E')-$$

$$-(c_{1t''}-\sum_{u+1}^{t''-1}h_j)(E-E')+(c_{kt'}-c_{kt''})+$$

$$+(c_{1t'}-c_{1t''}+\sum_{u+1}^{t''-1}h_j-\sum_{u+1}^{t'-1}h_j)E'+$$

$$+(c_{kz}-c_{kt})+(c_{1z}-c_{1t}+\sum_{u+1}^{t-1}h_j-\sum_{u+1}^{z-1}h_j)E.$$

Aus analogen Beziehungen wie (J) und (K) folgt

$H(u+1,t',z,v)\geq H(u'+1,t'',t,v)$, wenn

$c_{1t''}\leq c_{1,u+1}+\sum_{u+1}^{t''-1}h_j$ gilt.

2.2 $H(u+1,v'',v',v)-H(u+1,t',z,v)=(c_{kv'}-c_{kz})+(c_{1v'}-$

$-c_{1z}-\sum_{u+1}^{v'-1}h_j+\sum_{u+1}^{z-1}h_j)E'+(c_{kv''}-c_{kv'})+(c_{1v''}-$

$-c_{1v'}-\sum_{u+1}^{v''-1}h_j+\sum_{u+1}^{t'-1}h_j)E+$

$+(E-E')(c_{1t'}-c_{1z}+\sum_{t'}^{z-1}h_j).$

Aus analogen Beziehungen wie (J) und (K) folgt

$H(u+1,v'',v',v)\geq H(u+1,t',z,v)$, wenn

$c_{1z}\leq c_{1t'}+\sum_{t'}^{z-1}h_j$ gilt.

2.3 $H(u+1,v'',v',v)-H(u'+1,t'',t,v)=(c_{kv''}-c_{kt''})+$

$+(c_{1v''}-c_{1t''}+\sum_{u+1}^{t''-1}h_k-\sum_{u+1}^{v''-1}h_k)E+(c_{kv'}-c_{kt})+$

$+(c_{1v'}-c_{1t}+\sum_{u+1}^{t-1}h_j-\sum_{u+1}^{v'-1}h_j)E'+(E-E')(c_{1,u+1}-$

$-c_{1t}+\sum_{u+1}^{t-1}h_j).$

Aus analogen Beziehungen wie (J) und (K) folgt

$H(u+1,v'',v',v)\geq H(u'+1,t'',t,v)$, wenn

$c_{1t}\leq c_{1,u+1}+\sum_{u+1}^{t-1}h_j$ gilt.

Beispiel 5.4

TZI / Bko	1	2	3	4
r_t	20	60	90	30
E	70	70	70	70
c_{kt}	10	15	25	9
c_{1t}	5	8	6	7
h_t	1	2	4	3

u+1	v	$q_{u+1,v}$	$(q_{u+1} \cdots q_v)$	Kosten	H(u+1,v)	H*(u)+ H(u+1,v)	H*(v)
1	1	20	(20)	110	110	110	110
1	2	80	(70 10)	505	505	505	505
2	2	60	(60)	495	495	605	
1	3	170	(30 70 70)	1230			
			(70 30 70)	1150	1150	1150	1150
1	4	200	(60 70 70 0)	1590			
			(70 60 70 0)	1570	1570	1570	
4	4	30	(30)	219		1369	1369

Die optimale Lösung ist:

$q_1^*=70$, $q_2^*=30$, $q_3^*=70$, $q_4^*=30$.

6. Erweiterung auf mehrere Produkte

Bei den bisher betrachteten Erweiterungen wurde angenommen, dass es sich um die Lagerung und Erneuerung eines Produktes handelt. Dabei werden die Produkte getrennt behandelt. Für jedes Produkt werden die optimalen Erneuerungsmengen und die dazuhörigen Kosten ermittelt, so dass wir die minimalen gesamten Kosten als Summe der minimalen Kosten für die einzelnen Produkte erhalten.

Eine Veränderung des Modelles ergibt sich durch Einbeziehung von Nebenbedingungen, die zum Beispiel als gemeinsame Lagerkapazität für mehrere Produkte auftreten. Dann ist es nicht mehr möglich, die optimalen Erneuerungsmengen für jedes Produkt unabhängig von den anderen Produkten zu bestimmen.

Wenn alle Kosten, ausgenommen die Erneuerungskosten, linear sind, dann ist für grosse Probleme eine gute "Näherungslösung" bezüglich der optimalen ganzzahligen Erneuerungsmengen zu finden.

Zur Lösung solcher Probleme wäre es denkbar, dass eine Kombination der linearen Programmierung und der dynamischen Programmierung, wie wir später zeigen, in Betracht gezogen werden könnte.

Bei der mathematischen Formulierung des Mehrprodukt-modelles werden die Elemente im Einproduktfall mit einem oberen Index k versehen.

Für den gesamten Planungszeitraum sind dann die Kosten

$$(6.1) \qquad \sum_1^T \sum_1^K \left[c_{kt}^k \delta(q_t) + c_{1t}^k q_t^k + h_t^k x_t^{+k} + p_t^k x_t^{-k} \right]$$

unter den Restriktionen

$$(6.2) \qquad \sum_1^K d^k x_t^{+k} \leq V, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

$$(6.3) \qquad x_t^{-k} - x_t^{+k} - x_{t-1}^{-k} + x_{t-1}^{+k} + q_t^k = r_t^k, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.4) \qquad 0 \leq q_t^k \leq E_t^k, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.5) \qquad 0 \leq x_t^{+k} \leq L_t^k, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.6) \qquad 0 \leq x_t^{-k}, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.7) \qquad x_0^{+k} = x_0^{-k} = x_T^{+k} = x_T^{-k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

zu minimieren.
Die Restriktionen (6.2) drücken aus, dass die Produkte durch die gemeinsame Lagerkapazität verbunden sind.

6.1 Lineare gemischt-ganzzahlige Programmierung

$$\min \sum_1^T \sum_1^K \left[c_{kt}^k y_t^k + c_{1t}^k q_t^k + h_t^k x_t^{+k} + p_t^k x_t^{-k} \right]$$

$$(6.8) \qquad 0 \leq y_t^k E_t^k - q_t^k, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.9) \qquad 0 \leq y_t^k \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.10) \qquad y_t^k \text{ ganzzahlig}, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

$$(6.11) \qquad 0 \leq q_t^k, \quad \forall t \in \mathbb{T}, \ \forall k \in \mathbb{K},$$

(6.2), (6.3), (6.5), (6.6), (6.7).

6.2 Lineare Programmierung

Betrachten wir nun das Mehrproduktmodell ohne (6.2), dann

ist die optimale Lösung für das Modell gleich der Summe der optimalen Lösungen der einzelnen Einproduktmodelle in 5.

Es liegt nahe für grosse Probleme, das lineare Dekompositionsprinzip zu verwenden, das aber nur mit linearer Zielfunktion und linearen Restriktionen angewandt werden kann. Wie wir später sehen, können wir jedoch bei der Prüfung auf das Optimalitätskriterium die Nichtlinearität der Zielfunktion berücksichtigen.

Bei diesem Verfahren wird die Ganzzahligkeit der optimalen Lösung wegen der konvexen Kombination[1] der Eckpunkte nicht erhalten. Bei grossen Problemen mit K>>T wird aber diese Ganzzahligkeitsbedingung zum grössten Teil gewährleistet. Die Begründung dafür werden wir an späterer Stelle angeben.

Sei $c_{1t}^{k1}(q_t^k)=c_{kt}^k/q_t^k+c_{1t}^k$, wobei $c_{1t}^{k1}(0)=0$,

$$c^k=(c_{11}^{k1}\dots c_{1T}^{k1}\ h_1^k\dots h_T^k\ p_1^k\dots p_T^k),\ \forall k\in\mathbb{K},$$

$$b_0'=(V\dots V),$$

$$b'^k=(r_1^k\dots r_T^k\ E_1^k\dots E_T^k\ L_1^k\dots L_T^k),\ \forall k\in\mathbb{K},$$

$$Q'^k=(q_1^k\dots q_T^k\ x_1^{+k}\dots x_T^{+k}\ x_1^{-k}\dots x_T^{-k}),\ \forall k\in\mathbb{K},$$

$$A^k=\begin{bmatrix} d_1^k\dots 0 \\ \vdots \quad\ \vdots \\ 0 \quad\ d_T^k \end{bmatrix},\ \forall k\in\mathbb{K},$$

---

[1] Eine konvexe Kombination einer endlichen Anzahl von Punkten $Q_1,\dots,Q_n$ ist ein Punkt Q, so dass $Q=\sum_1^n\lambda_iQ_i$, $\lambda_i\geq 0$ $(\lambda=1,\dots,n)$ und $\sum_1^n\lambda_i=1$ gelten.
Vgl. G. HADLEY [8], S. 61.

$$D=\begin{bmatrix} 1\ldots0 & -1\ldots0 & 1\ldots0 \\ 0\ldots0 & 1\ldots0 & -1\ldots0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0\ldots1 & 0\ldots & -1\ 0\ldots1 \\ 1\ldots0 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0\ldots1 & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 1\ldots0 & 0\ldots0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0\ldots0 & 0\ldots1 & 0\ldots0 \end{bmatrix}.$$

Das Modell (6.1)-(6.7) kann folgendermassen formuliert werden:

$$\min \sum_1^K c^k Q^k$$

$$A^1Q^1+A^2Q^2+\ldots+A^KQ^K \leq b_0,$$

$$D\ Q^1 \leq b^1,$$

$$D\ Q^2 \leq b^2,$$

$$\ddots$$

$$D\ Q^K \leq b^K,$$

$$0 \leq Q^k, \quad \forall k \in \mathbb{K}.$$

Wir betrachten nun das folgende Teilproblem:

$$\min c^k Q^k$$

$$D\ Q^k \leq b^k,$$

$$0 \leq Q^k.$$

Die konvexe Menge $\{Q^k \mid D\ Q^k \leq b^k\}$ hat eine endliche Anzahl j^k von Eckpunkten Q_j^{*k} $(j \in \mathbb{J}^k = \{1 \ldots j^k\})$.
Jede zulässige Lösung Q^k des Teilproblemes kann durch

$$\sum_1^{j^k} m_j^k Q_j^{*k}$$

ausgedrückt werden, wobei

$$\sum_1^{j^k} m_j^k = 1, \quad m_j^k \geq 0, \quad \forall j \in \mathbb{J}^k$$

gilt.
Für das Modell (6.1)-(6.7) lautet dann die Formulierung

(6.12) $$\min \sum_1^K \sum_1^{j^k} [(c^k Q_j^{*k}) m_j^k]$$

(6.13) $$\sum_1^K \sum_1^{j^k} (A^k Q_j^{*k}) m_j^k \leq b_0,$$

(6.14) $$\sum_1^{j^k} m_j^k = 1, \quad \forall k \in \mathbb{K},$$

(6.15) $$0 \leq m_j^k, \quad \forall k \in K, \quad \forall j \in \mathbb{J}^k,$$

(6.16) $$m_j^k \text{ ganzzahlig}, \quad \forall k \in \mathbb{K}, \quad \forall j \in \mathbb{J}^k.$$

Jede zulässige Basislösung hat höchstens (K+T) positive Werte. Die Restriktion (6.14) besagt, dass mindestens ein m_j^k für jede k-te Restriktion positiv ist. Die verbleibenden T Basisvariablen werden höchstens in T Restriktionen (6.14) erscheinen, so dass mindestens (K-T) von m_j^k gleich 1 sind, d.h. wenn wir (6.16) nicht berücksichtigen, dann erhalten wir für K>>T eine gute Lösung im Hinblick auf die Ganzzahligkeit der optimalen Erneuerungsmengen.

Sei B die laufende Basismatrix des linearen Modelles (6.12)-(6.15) und c_B der entsprechende Bewertungsvektor. Dann ist eine zulässige Basislösung gleich $m_B = B^{-1} b$, wobei $b' = (b_0 \; 1 \ldots 1)$ gilt.

Sei $(c_B^T \; c_B^K) = c_B B^{-1}$, wobei c_B^T bzw. c_B^K T bzw. K Elemente enthält und E_k^K ein (K×1)-Vektor, der überall aus 0 ausser der mit 1 versehenen k-ten Stelle besteht.

Für die Grenzbewertung gilt dann:

$$\Delta_j^k = c_B B^{-1} \begin{bmatrix} A^k Q_j^{*k} \\ \\ E^k \end{bmatrix} - c^k Q_j^{*k},$$

$$\Delta_j^k = (c_B^T \; c_B^K) \begin{bmatrix} A^k Q_j^{*k} \\ \\ E^k \end{bmatrix} - c^k Q_j^{*k},$$

$$\Delta_j^k = (c_B^T A^k - c^k) Q_j^{*k} + c_B^K E^k.$$

Die zulässige Basislösung ist dann optimal, wenn $\min_j \Delta_j^k \geq 0$. Dies ist aber äquivalent zu:

$$\min \; [(c_B^T A^k - c^k) Q^k + c_B^K E^k]$$

$$D \; Q^k \leq b^k,$$

$$0 \leq Q^k,$$

d.h. um auf das Optimalitätskriterium der Simplex-Methode zu prüfen, lösen wir K Teilprobleme, die aber schon in 5 behandelt worden sind.

7. Schlussbemerkungen

Wir haben jede hier behandelte Erweiterung des WAGNER-WHITIN Ansatzes als lineares gemischt-ganzzahliges Modell formuliert.

Obwohl Algorithmen zur Lösung gemischt-ganzzahliger Programmierungsprobleme entwickelt wurden, sind sie nicht genügend "effizient", so dass wir diese Probleme mit den zur Verfügung stehenden Rechenanlagen mit vertretbarem Zeitaufwand lösen können.

Experimente mit verschiedenen Näherungsverfahren zur Lösung des Fixkostenproblemes wurden von STEINBERG durchgeführt[1].

Bei Anwendung der dynamischen Programmierung - wie im allgemeinen bekannt ist - wachsen die Rechenoperationen exponentiell mit der Zahl der Variablen. Um diesen Nachteil zu vermeiden, haben wir die Eigenschaften der zulässigen Basislösungen untersucht und dadurch den Zustandsraum verkleinert, so dass die Anzahl der relevanten Entscheidungspfade algebraisch mit der Zahl der TZI steigt.
Zum Beispiel ist sie im Grundmodell bzw. im Verzugsfall höchstens gleich $(T+1)T/2$ bzw. $(T^3+3T^2+2T)/6$.

Für das Mehrproduktmodell haben wir die Ergebnisse des Einproduktfalles, die die Ganzzahligkeitsbedingung der Erneuerungshäufigkeiten erfüllen, benutzt, um Pivotspalten bei Anwendung des linearen Dekompositionsprinzipes zu erzeugen. Besondere Algorithmen zur Lösung des Hauptproblemes sind von DANTZIG, VAN SLYKE und SWOVELAND entwickelt worden.

---

[1] Vgl. D.I. STEINBERG, "The Fixed Charge Problem", Naval Research Logistic Quarterly, Vol. 17, 1970, 217-236.

Dadurch wäre eine Verbesserung hinsichtlich der Ganzzahligkeit der optimalen Lösung und der Schnelligkeit der Konvergenz des Verfahrens denkbar. Für grosse Probleme $K \gg T$ sind diese Verfahren besonders geeignet[1].

Schliesslich gelten alle Theoreme für den Fall beliebiger konkaver Kostenfunktionen (z.B. bei Mengendiskontierung), wobei auch Nebenbedingungen anderer Arten wie z.B. Budgetrestriktion oder/und Maschinenkapazität berücksichtigt werden können.

[1] Vgl. G.B. DANTZIG, R. VAN SLYKE [3], C. SWOVELAND [18].

ANHANG: Verzeichnis der in der Arbeit verwendeten wichtigen Symbole und Abkürzungen

c_{1t}	erneuerungsproportionale Kosten im TZI t
c_{kt}	erneuerungsfixe Kosten im TZI t
d^k	dem k-ten Produkt entsprechender Volumenkoeffizient
ETZI	Erneuerungsteilzeitintervall
E_t	Erneuerungsschranke im TZI t
h_t	Lagerkosten je Mengenteilzeitintervall im TZI t
J^k	Menge der Eckpunkte des k-ten Teilproblemes
k	Produkt k
K	Anzahl der Produkte
K	Menge aller Produkte
LTZI	Lagerteilzeitintervall
L_t	Lagerschranke im TZI
M	sehr grosse positive Zahl
NLTZI	Nichtlagerteilzeitintervall
p_t	Verzugskosten je Mengenteilzeitintervall im TZI t
q_t	Erneuerungsmenge im TZI t
Q	Erneuerungsvektor
r_t	Bedarfsmenge im TZI t
TETZI	Teilerneuerungsteilzeitintervall
TZI	Teilzeitintervall
T	Anzahl der TZI im Planungszeitraum
T	Menge aller TZI
V	Gesamtlagervolumen
x_t	Lagergrösse vor Erneuerung im TZI t
x_0	Initiallagerbestand
x_t^+	nichtnegative Lagergrösse vor Erneuerung im TZI t
x_t^-	nichtpositive Lagergrösse vor Erneuerung im TZI t
y_t	binäre Variable im TZI t

LITERATURVERZEICHNIS

Für erwähnte Zeitschriften werden die folgenden Abkürzungen gebraucht:

MP : Mathematical Programming
MS : Management Science
NRLQ : Naval Research Logistic Quartely
OR : Operations Research
ORV : Operations Research Verfahren
UF : Unternehmensforschung

[1] BELLMAN, R.: Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957

[2] DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Uebersetzung von A. JAEGER, Springer-Verlag, Berlin, 1966

[3] DANTZIG, G.B., VAN SLYKE, R.: Generalized Upper Bounding Techniques, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 1, 1967, 213-226

[4] DZIELINSKI, B.P., BAKER, C., MANNE, A.: Simulation Tests of Lot Size Programming, MS, Vol. 9, No. 2, 1963, 229-258

[5] DZIELINSKI, B.P., GOMORY, R.E.: Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Labor Allocations, MS, Vol. 11, No. 9, 1965, 874-890

[6] EPPEN, G., GOULD, F.J., PASHIGIAN, B.P.: Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model, MS, Vol. 15, No. 5, 1969, 268-277

[7] FLORIAN, M., KLEIN, M.: Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints, MS, Vol. 18, No. 1, 1971, 12-20

[8] HADLEY, G.: Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1962

[9] HADLEY, G.: Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley Publishing Company, London, 1964

[10] KUNREUTHER, H., BLACKBURN, J.: Planning and Forecast Horizons for the Dynamic Lot Size Model with Backlogging, MS, Vol. 21, No. 2, 1974, 251-255

[11] LOVE, S.F.: Bounded Production and Inventory Models with Piecewise Concave Costs, MS, Vol. 20, No. 3, 1973, 313-318

[12] LUNDIN, R.A., MORTON, T.E.: Planning Horizons for the Dynamic Lot Size Model: ZABEL vs. Protective Procedures and Computational Results, OR, Vol. 23, No. 4, 1975, 711-734

[13] MANNE, A.S.: Programming of Economic Lot Sizes, MS, Vol. 4, No. 2, 1958, 115-135

[14] NEUMANN, K.: Zur Theorie und Praxis der Dynamischen Optimierung, UF, Bd. 9, Heft 3/4, 169-186/201-216

[15] POPP, W.: Einführung in die Theorie der Lagerhaltung, Springer-Verlag, Berlin, 1968

[16] RAO, M.R., JAGANNATHAN, R.: A Class of Deterministic Production Planning Problems, MS, Vol. 19, No. 11, 1973, 1295-1300

[17] RIEPL, R.J.: Ein deterministisches Mehrprodukt-Lagerhaltungsmodell, ORV, Bd. 17, 1973, 280-286

[18] SWOVELAND, C.: A Note on Column Generation in DANTZIG-WOLFE Decomposition Algorithms, MP, Vol. 6, 1974, 365-370

[19] VEINOTT, A.F. Jr.: The Status of Mathematical Inventory Theory, MS, Vol. 12, No. 11, 1966, 745-777

[20] VEINOTT, A.F. Jr.: Minimum Concave Cost Solution of Leontief Substitution Models of Multi-Facility Inventory Systems, OR, Vol. 17, No. 2, 1969, 262-291

[21] VEINOTT, A.F. Jr., MANNE, A.S.: Investments for Capacity Expansions: Size Location and Time Phasing, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Chapter 11, 1967

[22] WAGNER, H.M.: A Postscript to Dynamic Problems in the Theory of the Firm, NRLQ, Vol. 7, No. 1, 1960, 7-12

[23] WAGNER, H.M., WHITIN, T.M.: Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, MS, Vol. 5, No. 1, 1959, 89-96

[24] ZANGWILL, W.I.: A Deterministic Multiproduct, Multifacility Production and Inventory Model, OR, Vol. 14, No. 3, 1966, 486-507

[25] ZANGWILL, W.I.: A Deterministic Multiperiod Production Scheduling Model with Backlogging, MS, Vol. 13, No. 1, 1966, 105-119

[26] ZANGWILL, W.I.: The Piecewise Concave Funktion, MS, Vol. 13, No. 11, 1967, 900-912

[27] ZANGWILL, W.I.: A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System - A Network Approach, MS, Vol. 13, No. 9, 1969, 504-527